Algebra 2 - 16 giugno 2014

Nome e Cognome: Matricola:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Sia $K = \mathbb{Q}[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, dove per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ gli a_i siano tali che $a_i^2 \in \mathbb{Q}$. Detto u un arbitrario elemento di K mostrare che il grado del polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$ è una potenza di 2.

2. Siano H e K due sottogruppi di un gruppo finito G. Provare che se $|G : H|$ e $|G : K|$ sono coprimi, allora $G = HK$.

3. Sia $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ prodotto diretto di $\langle a \rangle$, ciclico di ordine 10, e $\langle b \rangle$ ciclico di ordine 6, e sia $g = (a^9, b^{10}) \in G$.
   (a) Determinare $|g|$
   (b) Determinare $|g^{24}|$.
   (c) Quanti sono i sottogruppi di $\langle g \rangle$?
   (d) E' vero che G è un gruppo ciclico?

4. Sia G un gruppo di ordine $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Supponiamo che G contenga un sottogruppo normale e abeliano di ordine 6.
   (a) Provare che tutti gli elementi di ordine 2 e quelli di ordine 3 di G appartengono ad N.
   (b) Dedurne che G ha un unico elemento di ordine 2 ed esattamente 2 elementi di ordine 3.
   (c) Provare che N è contenuto nel centro di G.
   (d) Osservando che il centro di G è contenuto nel normalizzante di ogni sottogruppo di G, provare che $n_5(G) = 1$.
   (e) Si deduca che G è abeliano.

5. Siano $\epsilon \in \mathbb{C}$ una radice primitiva sesta dell'unitè e $u = \sqrt[6]{5}$.
   (a) Si determini il polinomio minimo $f_1(x)$ di ϵ su $\mathbb{Q}$.
   (b) Si determini il polinomio minimo $f_2(x)$ di u su $\mathbb{Q}$.
   (c) Siano E_1 ed E_2 i campi di spezzamento di f_1 e di $f_2(x)$. Si determinino $|E_1 : \mathbb{Q}]$, $|E_2 : \mathbb{Q}]$ e $|E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}]$.

6. Si consideri l'ideale $I = (29)$ nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss.
   (a) E' vero che I è un ideale massimale?
   (b) Qual'è l'ordine dell'anello $\mathbb{Z}[i]/I$?
   (c) Quanti sono gli elementi invertibili nell'anello $\mathbb{Z}[i]/I$?