Algebra 2 - Primo compitino - 12 novembre 2013 **Tema B**

NOME E COGNOME: MATRICOLA:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Sia G un p-gruppo finito e sia N un sottogruppo normale di G. Provare che se $N \neq 1$, allora $N \cap Z(G) \neq 1$ (*Suggerimento: considerare l'azione di coniugio di G su N e studiare la cardinalità delle orbite*).

2. Sia $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico di ordine 120 e siano $H = \langle g^{18} \rangle$ e $K = \langle g^{28} \rangle$.
   (a) Determinare $|H|$ e $|K|$.
   (b) Trovare l'ordine e un generatore per $H \cap K$ e per $\langle H, K \rangle$.
   (c) Quanti elementi di ordine 15 contiene G?
   (d) Quanti elementi di ordine 15 contiene il gruppo $H \times K$?

3. Si considerino le permutazioni $\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7,8)$ e $\tau = (1,2,3)(4,7,5,8,6)$.
   (a) Determinare il numero di coniugati di σ nel gruppo simmetrico S_8.
   (b) Descrivere il centralizzante di σ in S_8, esibendone un insieme di generatori.
   (c) Trovare $\beta \in S_8$ tale che $\tau = \beta\sigma\beta^{-1}$.
   (d) Esiste $\beta \in A_8$ tale che $\tau = \beta\sigma\beta^{-1}$?

4. Supponiamo che G sia un gruppo finito di ordine q^2p con p e q primi distinti. Denotiamo con $n_p(G)$ e $n_q(G)$ il numero dei p-sottogruppi di Sylow e dei q-sottogruppi di Sylow di G.
   (a) Provare che se $n_q(G) \neq 1$ allora $p > q$.
   (b) Provare che se $n_q(G) \neq 1$ allora $n_p \neq q$.
   (c) Provare che se $n_p(G) = q^2$ allora G contiene $|G| - q^2$ elementi di ordine p.
   (d) Provare che G contiene almeno un sottogruppo di Sylow normale.
   (e) Provare che G contiene almeno un sottogruppo normale di indice primo.

5. Sia $G = GL(2,5)$ il gruppo delle matrici invertibili 2×2 sul campo $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e sia $N = SL(2,5)$ il sottogruppo di G formato dalle matrici in G che hanno determinante 1.
   (a) Provare che N è un sottogruppo normale di G e che G/N è ciclico di ordine 4.
   (b) Determinare gli ordini di G e di N.
   (c) Sia $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Determinare l'ordine di g.
   (d) Trovare il centralizzante di g in G e in N.
   (e) Calcolare $n_5(G)$. Quanti sono gli elementi di G di ordine 5?
   (f) Provare che tutti gli elementi di G di ordine 5 sono coniugati.
   (g) E' vero che tutti gli elementi di N di ordine 5 sono coniugati in N?

6. Sia G un gruppo finito contenente un sottogruppo normale N con la proprietà che tutti gli elementi di N diversi da 1 sono coniugati in G. Provare che G contiene un sottogruppo di indice $|N| - 1$ e dedurne $|G| \geq |N|^2 - |N|$.