Svolgimento del compitino di Algebra 2 del 17/11/2014 (Tema A).

1. (a) Provare che $G/Z(G)$ è isomorfo a un sottogruppo del gruppo degli automorfismi di G.

   (b) Provare che se $G/Z(G)$ è ciclico allora G è abeliano.

   (c) Provare che se il gruppo degli automorfismi di G è ciclico, allora G è abeliano.

   Svolgimento. (a). Consideriamo l'azione di G su se stesso per coniugio: $G \times G \to G$, $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$. Il nucleo di questa azione è $\{g \in G \ : \ gxg^{-1} = x \forall x \in G\} = \{g \in G \ : \ gx = xg \ \forall x \in G\} = Z(G)$, il centro di G. Consideriamo la funzione $\gamma : G \to \mathrm{Aut}(G)$ che manda g in γ_g definita da $\gamma_g(x) := gxg^{-1}$. Allora γ è un omomorfismo di gruppi con nucleo $Z(G)$, quindi per il teorema di isomorfismo $G/Z(G)$ è isomorfo all'immagine di γ, che è un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(G)$.

   (b). Sia $Z = Z(G)$. Supponiamo che G/Z sia ciclico. Allora esiste $g \in G$ tale che G/Z è ciclico generato da gZ. Ne segue che ogni laterale di Z è del tipo $(gZ)^k = g^k Z$, e siccome G è unione di laterali di Z (formano una partizione di G) ogni elemento di G è della forma $g^k z$ con k un numero intero e $z \in Z$. Siano allora $g^k z$, $g^h w$ due arbitrari elementi di G, con h, k numeri interi e $z, w \in Z$. Dobbiamo mostrare che commutano, cioè che $g^k z \cdot g^h w = g^h w \cdot g^k z$. Usando il fatto che $z, w \in Z = Z(G)$, cioè che z, w commutano con tutti gli elementi di G, e il fatto che due potenze di g commutano tra loro essendo $g^n g^m = g^{n+m} = g^{m+n} = g^m g^n$, abbiamo

   $$g^k z g^h w = g^k g^h z w = g^h g^k w z = g^h w g^k z.$$

   (c). Supponiamo che $\mathrm{Aut}(G)$ sia ciclico. Per il punto (a) $G/Z(G)$ è isomorfo a un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(G)$. Siccome $\mathrm{Aut}(G)$ è ciclico per ipotesi, anche $G/Z(G)$ è ciclico, infatti è isomorfo a un sottogruppo di un gruppo ciclico. Ora dal punto (b) segue che G è abeliano.

2. Si considerino le permutazioni $\alpha = (1, 2, 3, 5), \beta = (2, 5), \gamma = (4, 6)$ e sia H il sottogruppo di S_6 generato da questi tre elementi.

   (a) Provare che $\langle \alpha, \beta \rangle$ è isomorfo a D_4 e che $H \cong D_4 \times C_2$.

   (b) Provare che H è un 2-sottogruppo di Sylow di S_6.

   (c) Quanti elementi di ordine 4 contiene H?

   (d) È vero che gli elementi di ordine 4 di H sono a due a due coniugati in H?

   (e) Trovare, se possibile, due elementi di H che sono coniugati in S_6 ma non in H.

   (f) Siano $1 \leq i \neq j \leq 6$ e si consideri $\sigma = (i, j) \in S_6$. Provare che H è coniugato in S_6 a un 2-sottogruppo di Sylow di $C_{S_6}(\sigma)$.

   (g) Determinare il numero di coniugati di H in S_6.

Svolgimento. (a) Osserviamo che $o(\alpha) = 4$, $o(\beta) = 2$, $\alpha \neq \beta$ e quindi per concludere che $\langle \alpha, \beta \rangle \cong D_4$ ci resta da mostrare che $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}$. Poiché $o(\beta) = 2$ abbiamo $\beta^{-1} = \beta$. Ora calcoliamo

$$\beta\alpha\beta^{-1} = \beta\alpha\beta = (25)(1235)(25) = (1532) = (1235)^{-1} = \alpha^{-1}.$$

Ora siano $A := \langle \alpha, \beta \rangle$ e $B := \langle \gamma \rangle$. Siccome α, β fissano $4, 6$, ogni elemento di A fissa 4 e 6 quindi $\gamma \notin A$, e siccome $o(\gamma) = 2$ ne segue che $A \cap B = \{1\}$. Inoltre siccome ogni elemento di A ha nella struttura ciclica solo cicli che coinvolgono $1, 2, 3, 5$ e ogni elemento di B ha nella struttura ciclica solo cicli che coinvolgono $4, 6$, ogni elemento di A commuta con ogni elemento di B, cioè A e B si centralizzano, in particolare $AB \leq S_6$ e $A, B \trianglelefteq AB$. Siccome $A \cap B = \{1\}$ concludiamo che $H = AB \cong A \times B$. Un elemento di H può quindi essere rappresentato nei due modi equivalenti ab o (a, b) con $a \in A$, $b \in B$ (a seconda se si considera $A \times B$ come prodotto diretto interno o esterno).

(b). $|S_6| = 6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ quindi i 2-sottogruppi di Sylow di S_6 sono esattamente i sottogruppi di S_6 di ordine $2^4 = 16$. Siccome $|H| = |A \times B| = |A||B| = 8 \cdot 2 = 16$, H è un 2-sottogruppo di Sylow di S_6.

(c). Ricordiamo che $H \cong D_4 \times C_2$ e rappresentiamo quindi gli elementi di H come coppie ordinate. Un elemento di ordine 4 di H è quindi del tipo (x, y) dove $o(x) = 4$ e y è arbitrario. D_4 contiene due elementi di ordine 4 (che sono α, α^{-1}) quindi H contiene $2 \cdot 2 = 4$ elementi di ordine 4.

(d). La domanda è se tutti gli elementi di ordine 4 sono coniugati, cioè se ogni elemento di ordine 4 è coniugato ad ogni altro elemento di ordine 4. Ricordiamo che $H \cong D_4 \times C_2$ e rappresentiamo quindi gli elementi di H come coppie (usando cioè la notazione del prodotto diretto esterno). Osserviamo che (α, γ) e $(\alpha, 1)$ hanno ordine 4, d'altra parte non sono coniugati in H infatti se $(x, y) \in H$ allora coniugando (α, γ) con (x, y) troviamo

$$(x, y)(\alpha, \gamma)(x, y)^{-1} = (x, y)(\alpha, \gamma)(x^{-1}, y^{-1}) = (x\alpha x^{-1}, y\gamma y^{-1}) \neq (\alpha, 1),$$

infatti $y\gamma y^{-1} \neq 1$ (altrimenti $y\gamma y^{-1} = 1$ da cui $\gamma = y^{-1}y = 1$ assurdo).

(e). Abbiamo $\alpha^2 = (13)(25)$ quindi $\alpha^2\beta = (13)(25)(25) = (13)$. Ora certamente $\alpha^2\beta = (13)$ e $\gamma = (46)$ sono coniugati in S_6 (hanno la stessa struttura ciclica). D'altra parte non lo sono in H, infatti tramite l'isomorfismo $H \cong A \times B$ visto sopra corrispondono alle coppie $(\alpha^2\beta, 1)$, $(1, \gamma)$, che certamente non sono coniugate dato che se $(x, y) \in H$ allora

$$\begin{aligned} (x, y)(\alpha^2\beta, 1)(x, y)^{-1} &= (x, y)(\alpha^2\beta, 1)(x^{-1}, y^{-1}) = (x\alpha^2\beta x^{-1}, yy^{-1}) \\ &= (x\alpha^2\beta x^{-1}, 1) \neq (1, \gamma). \end{aligned}$$

(f). Calcoliamo $|C_{S_6}(\sigma)|$. In S_6, σ ha $\binom{6}{2} = 15$ coniugati (tutti e soli i 2-cicli), d'altra parte il numero di coniugati di σ è l'indice del suo centralizzante, $|S_6 : C_{S_6}(\sigma)|$ quindi $15 = |S_6 : C_{S_6}(\sigma)| = |S_6|/|C_{S_6}(\sigma)|$ da cui

$|C_{S_6}(\sigma)| = 6!/15 = 2^4 \cdot 3$. Sia P un 2-sottogruppo di Sylow di $C_{S_6}(\sigma)$. Siccome $|P| = 2^4$, P è anche un 2-sottogruppo di Sylow di S_6, per cui per il teorema di Sylow H e P sono coniugati in S_6.

(g). Osserviamo che l'unico 2-ciclo di H centralizzato da H è $\gamma = (46)$. Infatti $Z(H) = Z(A \times B) = Z(A) \times Z(B) = \langle (13)(25) \rangle \times \langle (46) \rangle$. Ne segue che H è contenuto in $C_{S_6}(\gamma)$, e non solo: se x, y sono due 2-cicli distinti in S_6 allora $C_{S_6}(x)$ e $C_{S_6}(y)$ hanno 2-Sylow distinti. Inoltre siccome se $x \in S_6$ allora $xHx^{-1} = \langle x\alpha x^{-1}, x\beta x^{-1}, x\gamma x^{-1} \rangle$ è contenuto in $C_{S_6}(x\gamma x^{-1})$, per il teorema di Sylow ogni 2-Sylow di S_6 è contenuto nel centralizzante di un 2-ciclo. Ne segue che il numero di coniugati di H in S_6, cioè $n_2(S_6)$, è uguale al numero di 2-cicli moltiplicato per il numero di 2-Sylow del centralizzante di un 2-ciclo. Ora il numero di 2-cicli è $\binom{6}{2} = 15$. Sia $K := C_{S_6}((46))$. Allora come visto $|K| = 48$ e d'altra parte K contiene $\mathrm{Sym}(1,2,3,5) \times \mathrm{Sym}(4,6)$ che ha ordine $4! \cdot 2! = 48$. Ne segue che $K = \mathrm{Sym}(1,2,3,5) \times \mathrm{Sym}(4,6) \cong S_4 \times S_2$ e quindi $n_2(K) = n_2(S_4) = 3$. In conclusione $n_2(S_6) = 15 \cdot 3 = 45$.

3. Siano $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$ due gruppi ciclici di ordine, rispettivamente, 12 e 16 e si considerino i due elementi $x = (a^8, b^{12})$ e $y = (a^{10}, b^8)$ di $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$.

   (a) Determinare gli ordini di x e di y.
   (b) Trovare gli elementi di ordine 2 in $\langle x \rangle$ e in $\langle y \rangle$.
   (c) Trovare gli elementi di ordine 3 in $\langle x \rangle$ e in $\langle y \rangle$.
   (d) Determinare l'ordine di $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$.
   (e) Determinare l'ordine di $G = \langle x, y \rangle$ e scrivere G come prodotto diretto di gruppi ciclici di ordine potenza di primo.

   Svolgimento. Si ha $o(a) = 12$, $o(b) = 16$.

   (a) In generale l'ordine di una coppia (z, w) è il minimo k tale che $z^k = 1 = w^k$, per cui è il minimo comune multiplo $\mathrm{mcm}(o(z), o(w))$. Ne segue che

$$\begin{aligned} o(x) &= \mathrm{mcm}(o(a^8), o(b^{12})) = \mathrm{mcm}(o(a)/(8, o(a)), o(b)/(12, o(b))) \\ &= \mathrm{mcm}(3, 4) = 3 \cdot 4 = 12, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o(y) &= \mathrm{mcm}(o(a^{10}), o(b^8)) = \mathrm{mcm}(o(a)/(10, o(a)), o(b)/(8, o(b))) \\ &= \mathrm{mcm}(6, 2) = 6. \end{aligned}$$

   (b). Ricordiamo che in un gruppo ciclico di ordine n se d divide n allora ci sono esattamente $\varphi(d)$ elementi di ordine d, dove φ è la funzione di Eulero. Quindi se n è pari c'è un unico elemento di ordine 2, infatti $\varphi(2) = 1$. Siccome $o(x) = 12$, l'unico elemento di $\langle x \rangle$ di ordine 2 è $x^6 = (a^{48}, b^{72}) = (1, b^8)$. Siccome $o(y) = 6$, l'unico elemento di $\langle y \rangle$ di ordine 2 è $y^3 = (a^{30}, b^{24}) = (a^6, b^8)$.

(c). In un gruppo ciclico di ordine divisibile per 3 ci sono $\varphi(3) = 2$ elementi di ordine 3, che quindi sono uno l'inverso dell'altro. Ne segue che in $\langle x \rangle$ gli elementi di ordine 3 sono $x^4 = (a^{32}, b^{48}) = (a^8, 1)$ e $x^{-4} = (a^{-8}, 1) = (a^4, 1)$, e in $\langle y \rangle$ gli elementi di ordine 3 sono $y^2 = (a^{20}, 1) = (a^8, 1)$ e $y^{-2} = (a^{-8}, 1) = (a^4, 1)$.

(d). Attenzione, in generale non c'è una formula per $|\langle x \rangle \cap \langle y \rangle|$ che dipende solo da x e y. Bisogna esaminare il singolo caso.

Nel nostro caso x ha ordine 12 e y ha ordine 6. Come visto $(a^4, 1) \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ e $(a^4, 1)$ ha ordine 3 quindi 3 divide $|\langle x \rangle \cap \langle y \rangle|$ per il teorema di Lagrange. D'altra parte $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ è ciclico, in quanto sottogruppo di gruppi ciclici, quindi se ha ordine pari allora ha un unico elemento di ordine 2, che quindi dev'essere l'unico elemento di ordine 2 di $\langle x \rangle$ e di $\langle y \rangle$. Ma come abbiamo visto nel punto (b), $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ hanno elementi di ordine 2 distinti. Ne segue che detto $d := |\langle x \rangle \cap \langle y \rangle|$ si ha che 3 divide d, d è dispari e d divide $|\langle y \rangle| = 6$ (per il teorema di Lagrange, essendo $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \leq \langle y \rangle$), per cui $d = 3$.

(e). Siccome x e y commutano si ha $\langle x, y \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle$, quindi $|\langle x, y \rangle| = |\langle x \rangle \langle y \rangle| = |\langle x \rangle||\langle y \rangle|/|\langle x \rangle \cap \langle y \rangle| = 12 \cdot 6/3 = 12 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3$. Quindi per il teorema di struttura dei gruppi abeliani finiti $\langle x, y \rangle$ è isomorfo a uno dei seguenti: $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3$, $C_2 \times C_4 \times C_3$, $C_8 \times C_3$. Siccome $\langle x, y \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle$, ogni elemento di $\langle x, y \rangle$ è del tipo $x^n y^m$ quindi siccome $o(x) = 12$ e $o(y) = 6$ si ha $(x^n y^m)^{12} = (x^{12})^n (y^{12})^m = 1$ per cui $\langle x, y \rangle$ non ha elementi di ordine 8. D'altra parte ha elementi di ordine 4, per esempio x^3. Ne segue che $\langle x, y \rangle \cong C_2 \times C_4 \times C_3$.

4. Sia $n \geq 2$ e D_n il gruppo diedrale di grado n e ordine $2n$. Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:

   - n è dispari;
   - gli elementi di ordine 2 di D_n sono tutti coniugati.

   Svolgimento. Supponiamo che n sia dispari e siano x, y due elementi di D_n di ordine 2. Allora $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ sono due 2-Sylow di D_n, infatti hanno ordine 2 e $|D_n| = 2n$, e n è dispari. Per il teorema di Sylow sono coniugati, cioè esiste $g \in D_n$ con $g\langle x \rangle g^{-1} = \langle y \rangle$. Ora siccome x, y hanno ordine 2, $\langle x \rangle = \{1, x\}$ e $\langle y \rangle = \{1, y\}$, e quindi $\{1, y\} = \langle y \rangle = g\langle x \rangle g^{-1} = g\{1, x\}g^{-1} = \{1, gxg^{-1}\}$. Siccome $y \neq 1$ ne segue che $y = gxg^{-1}$, quindi x e y sono coniugati in D_n.

   Supponiamo che gli elementi di ordine 2 di D_n siano tutti coniugati. Se n fosse pari allora $|Z(D_n)| = 2$ se $n \geq 3$ e $Z(D_2) = D_2$ con $|D_2| = 4$, quindi esisterebbe un elemento $x \in Z(D_n)$ di ordine 2, in particolare x sarebbe coniugato solamente a se stesso, e quindi non è vero che tutti gli elementi di ordine 2 sono coniugati. Osserviamo infatti che D_n contiene più di un elemento di ordine 2 se $n \geq 2$: scriviamo $D_n = \langle a \rangle \langle b \rangle$ con $o(a) = n$, $o(b) = 2$ e $bab^{-1} = bab = a^{-1}$. Allora b ha ordine 2 e anche

$aba^{-1} = aba^{-1}bb = aab = a^2b$ ha ordine 2, e $a^2b \neq b$ se $n > 2$. Se invece $n = 2$ allora $D_n = D_2 \cong C_2 \times C_2$ ha tre elementi di ordine 2.

5. Sia G un gruppo di ordine 30. Provare che o un 3-sottogruppo di Sylow o un 5-sottogruppo di Sylow di G è normale.

   Svolgimento. $|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Supponiamo per assurdo che $n_3 \neq 1$ e $n_5 \neq 1$. Per il teorema di Sylow si ha allora $n_3 = 10$ e $n_5 = 6$. Siccome i 3-Sylow hanno ordine 3 e i 5-Sylow hanno ordine 5, G contiene $10 \cdot 2 = 20$ elementi di ordine 3 e $6 \cdot 4 = 24$ elementi di ordine 5, e questo è assurdo perché $20 + 24 = 44 > 30 = |G|$.