Appunti per il Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Marco A. Garuti

4 giugno 2009

Questi appunti integrano il testo adottato per il corso (Cantarini - Chiarellotto - Fiorot, *Un corso di Matematica*, ed. Libreria Progetto, Padova).
Gli enunciati (senza dimostrazione) del Teorema 1 del §2 (decomposizione LU), e del Teorema 4 del §5 (Formula di Eulero) ed i §3 (cenni di deoria di Jordan) e §4 (diagonalizzazione ortogonale delle matrici simmetriche), dimostrazioni incluse, costituiscono programma di esame.
Le rimanenti sezioni, facoltative, presentano da un punto di vista algebrico-geometrico alcuni argomenti che vengono anche trattati nel corso di Calcolo Numerico. Le dimostrazioni sono incluse per completezza.

1 Matrici a blocchi

Sia $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Ad una scomposizione $n = p + q$ ed $m = r + s$ come somma di due numeri interi positivi possiamo associare una partizione

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \tag{1}$$

di M in sottomatrici, dove $A \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{R})$. In particolare, se M è quadrata ($n = m$) e se $p = r$ e $q = s$, A e D sono matrici quadrate di ordine rispettivamente $p \times p$ e $q \times q$ mentre B e C sono di ordine rispettivamente $p \times q$ e $q \times p$ (e dunque rettangolari se $p \neq q$).
Concretamente, se chiamiamo $m_{i,j}$ i coefficienti di M, le matrici A, B, C e D sono le matrici di coefficienti rispettivamente

$$\begin{array}{rlll} a_{i,j} & = m_{i,j} & i = 1, \dots, p\ ; & j = 1, \dots, r \\ b_{i,u} & = m_{i,r+u} & i = 1, \dots, p\ ; & u = 1, \dots, s \\ c_{t,j} & = m_{p+t,j} & t = 1, \dots, q\ ; & j = 1, \dots, r \\ d_{t,u} & = m_{p+t,r+u} & t = 1, \dots, q\ ; & u = 1, \dots, s. \end{array} \tag{2}$$

Una matrice M partizionata come in (1) si dice *matrice a blocchi* e le sottomatrici della partizione sono dette *blocchi* di M.

Esempio 1 I blocchi della matrice $M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 6 \\ \hline 4 & \sqrt{2} & 5 \end{array}\right)$ sono $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$.

La partizione in blocchi viene introdotta per poter effettuare i calcoli "un pò alla volta". Consideriamo una seconda matrice M' partizionata a blocchi come M. Poiché le operazioni di somma tra matrici e di moltiplicazione di una matrice per uno scalare si effettuano coefficiente per coefficiente, tali operazioni rispettano le partizioni in blocchi:

$$M + M' = \left(\begin{array}{c|c} A + A' & B + B' \\ \hline C + C' & D + D' \end{array}\right); \qquad \alpha M = \left(\begin{array}{c|c} \alpha A & \alpha B \\ \hline \alpha C & \alpha D \end{array}\right).$$

L'utilità delle matrici a blocchi è dovuta al fatto, molto meno evidente, che tali partizioni sono rispettate anche dal prodotto tra matrici. Ci limitiamo al caso in cui una delle matrici è quadrata.

Proposizione 1 *Siano* $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *ed* $M' = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *partizionate in blocchi corrispondenti alle decomposizioni* $n = p + q$ *ed* $m = r + s$. *Allora*

$$MM' = \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array}\right).$$

In altre parole, il prodotto di due matrici a blocchi si effettua formalmente come se si trattasse di un prodotto di matrici 2×2. La proposizione 1 è alla base degli algoritmi utilizzati dai calcolatori, poiché permette di ricondurre il calcolo di un prodotto tra matrici a somme di prodotti tra matrici di ordine più piccolo, che richiedono meno tempo. È particolarmente utile nel caso di matrici *sparse*, cioè con un gran numero di coefficienti nulli, nel qual caso si cercano partizioni in cui molti blocchi siano interamente nulli.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che l'espressione a secondo membro ha senso, cioé che in ciascuno dei prodotti il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda e che le somme risultanti sono tra matrici che hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne.
Ricordiamo che, se le matrici M ed M' hanno coefficienti $m_{i,j}$ ed $m'_{i,j}$ rispettivamente, l'elemento che si trova sulla i-esima riga e j-esima colonna del prodotto MM' è il prodotto della i-esima riga di M con la j-esima colonna di M', cioè

$$\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m'_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} m_{i,k}m'_{k,j} + \sum_{h=1}^{q} m_{i,p+h}m'_{p+h,j} \tag{3}$$

Calcoliamo i due addendi al secondo membro di (3) utilizzando le formule (2). Dobbiamo distinguere quattro casi, corrispondenti ai blocchi di MM':

$\boxed{i \leq p, j \leq r}$ Allora $m_{i,k}m'_{k,j} = a_{i,k}a'_{k,j}$, quindi il primo addendo è il prodotto della i-esima riga di A per la j-esima colonna di A'. D'altra parte, $m_{i,p+h}m'_{p+h,j} = b_{i,h}c'_{h,j}$, quindi il secondo addendo è il prodotto della i-esima riga di B per la j-esima colonna di C'.

$\boxed{i \leq p, j > r}$ Poniamo $u = j - r$. Allora $m_{i,k}m'_{k,r+u} = a_{i,k}b'_{k,u}$, quindi il primo addendo è il prodotto della i-esima riga di A per la u-esima colonna di B'. D'altra parte, $m_{i,p+h}m'_{p+h,r+u} = b_{i,h}d'_{h,u}$, quindi il secondo addendo è il prodotto della i-esima riga di B per la u-esima colonna di D'.

$\boxed{i > p, j \leq r}$ Poniamo $t = i - p$. Allora $m_{p+t,k}m'_{k,j} = c_{t,k}a'_{k,j}$, quindi il primo addendo è il prodotto della t-esima riga di C per la j-esima colonna di A'. D'altra parte, $m_{p+t,p+h}m'_{p+h,j} = d_{t,h}c'_{h,j}$, quindi il secondo addendo è il prodotto della t-esima riga di D per la j-esima colonna di C'.

$\boxed{i > p, j > r}$ Poniamo $t = i - p$ ed $u = j - r$. Allora $m_{p+t,k}m'_{k,p+u} = c_{t,k}b'_{k,u}$, quindi il primo addendo è il prodotto della t-esima riga di C per la u-esima colonna di B'. D'altra parte, $m_{p+t,p+h}m'_{p+h,p+u} = d_{t,h}d'_{h,u}$, quindi il secondo addendo è il prodotto della t-esima riga di D per la u-esima colonna di D'.

Nella costruzione della decomposizione LU di una matrice (teorema 1 più avanti) avremo bisogno del seguente caso particolare, che riportiamo per comodità.

Corollario 1 *Siano* $\left(\begin{array}{c|c} L & \mathbf{0} \\ \hline C & I_q \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *ed* $\left(\begin{array}{c|c} U & B \\ \hline \mathbf{0} & D \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, *partizionate in blocchi corrispondenti alle decomposizioni* $n = p + q$ *ed* $m = r + s$. *Sia* $D = QD'$ *una fattorizzazione dell'ultimo blocco della seconda matrice, con* $Q \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ *e* $D' \in \mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\left(\begin{array}{c|c} L & \mathbf{0} \\ \hline C & I_q \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & B \\ \hline \mathbf{0} & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L & \mathbf{0} \\ \hline C & Q \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & B \\ \hline \mathbf{0} & D' \end{array}\right).$$

Dimostrazione. Calcolando si trova che entrambi i prodotti sono uguali a $\left(\begin{array}{c|c} LU & LB \\ \hline CU & CB+D \end{array}\right)$.

2 La decomposizione LU

In questo paragrafo presenteremo l'algoritmo principale per il calcolo della riduzione in forma a scala di una matrice. In particolare dimostreremo il fatto che ogni matrice può essere portata in forma a scala. Benché meno flessibile (non si può lasciare libertà di scelta ad un calcolatore!) del metodo di riduzione "a mano libera", questo procedimento è solo marginalmente più laborioso e presenta due vantaggi: 1) la possibilità di verificare a posteriori se si sono fatti degli errori nel calcolo; 2) la possibilità di risolvere un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ conoscendo la riduzione della matrice A senza doverla ricalcolare per la matrice completa $(A|\mathbf{b})$, cosa che risulta utile ad esempio nella teoria di Jordan (vedi §3).

Definizione 1 *Diremo che una matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ è* triangolare superiore *se per ogni $i = 1, \ldots, n$ i primi $i-1$ coefficienti della i-esima riga di A sono nulli. Vale a dire che $a_{i,j} = 0$ $\forall$ $j < i$.*
Diremo che A è triangolare inferiore *se per ogni $i = 1, \ldots, n$ gli ultimi $m-i$ coefficienti della i-esima riga di A sono nulli. Vale a dire che $a_{i,j} = 0$ $\forall$ $j > i$.*

Esempio 2 La matrice nulla $\mathbf{0}_{n,m}$, la matrice identità I_n o una qualunque matrice diagonale sono sia triangolari superiori che inferiori. Una matrice di Jordan (vedi §3) è triangolare superiore. Una matrice quadrata è triangolare superiore (risp. inferiore) se tutti i coefficienti sotto (risp. sopra) la diagonale sono nulli. La trasposta di una matrice triangolare superiore è triangolare inferiore e viceversa.

Esempio 3 Ricordiamo che una matrice si dice *in forma a scala per righe* se il primo elemento non nullo di ciascuna riga (detto *pivot*) si trova su una colonna più a destra rispetto ai pivot delle righe precedenti. Una matrice in forma a scala per righe è dunque triangolare superiore.

Esempio 4 Dato $\beta \in \mathbb{R}$ ed $j < i \leq n$, sia $H_{i,j}(\beta)$ la matrice ottenuta dalla matrice identità I_n sostituendo la i-esima riga $\mathbf{e}_i$ con la somma $\mathbf{e}_i + \beta\,\mathbf{e}_j$ della i-esima riga con la j-esima moltiplicata per β. Pertanto tutti i coefficienti di $H_{i,j}(\beta)$ sono uguali ai coefficienti di I_n eccetto quello che si trova sulla i-esima riga e j-esima colonna che è β. Dunque $H_{i,j}(\beta)$ è triangolare superiore.

Lemma 1 *Il prodotto di due matrici quadrate triangolari inferiori (risp. superiori) è una matrice triangolare superiore (risp. inferiore).*

Dimostrazione. Siano $A = (a_{i,j})$ e $B = (b_{i,j})$ matrici $n \times n$ triangolari inferiori. L'elemento che si trova sulla i-esima riga e j-esima colonna di AB è $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i} a_{i,k}b_{k,j}$, dato che $a_{i,i+1} = \cdots = a_{i,n} = 0$ (perché A è triangolare inferiore). Analogamente $b_{1,j} = \cdots = b_{j-1,j} = 0$. Quindi, se $j > i$, elemento che si trova sulla i-esima riga e j-esima colonna di AB è nullo, cioè AB è triangolare inferiore. L'enunciato per matrici triangolari superiori si dimostra per trasposizione.

Ricordiamo che le *operazioni elementari* sulle righe di una matrice sono:

1) scambiare la i-esima e la j-esima riga;

2) moltiplicare la i-esima riga per uno scalare $\alpha \neq 0$;

3) sommare alla j-esima riga la i-esima riga moltiplicata per uno scalare β.

Indichiamo rispettivamente con $S_{i,j}$, $H_i(\alpha)$ e $H_{i,j}(\beta)$ le matrici $n \times n$ (dette *matrici elementari*) ottenute applicando alla matrice identità I_n rispettivamente le operazioni 1), 2) e 3).
Allora se A è una qualsiasi matrice di n righe ed m colonne e se A', A'' ed A''' sono le matrici ottenute applicando ad A rispettivamente le operazioni 1), 2) e 3), abbiamo le relazioni

$$A' = S_{i,j}A; \qquad A'' = H_i(\alpha)A; \qquad A''' = H_{i,j}(\beta)A. \tag{4}$$

Per ricavare A a partire dalle sue trasformate elementari, potremo utilizzare il seguente

Lemma 2 *1)* $S_{i,j}^2 = I_n$.

2) $\forall\ \alpha \neq 0$ *si ha* $H_i(\alpha)H_i(\frac{1}{\alpha}) = I_n$.

3) $\forall\ \beta \in \mathbb{R}$ *si ha* $H_{i,j}(\beta)H_{i,j}(-\beta) = I_n$.

Dimostrazione. È ovvia se consideriamo le operazioni che definiscono tali matrici. Se scambiamo due righe di una matrice e poi le scambiamo di nuovo ritroviamo la matrice di partenza. Se moltiplichiamo una riga per α e poi la dividiamo per α ritroviamo la matrice di partenza. Se sommiamo alla j-esima riga la i-esima moltiplicata per β e poi le sottraiamo la i-esima riga moltiplicata β ritroviamo la matrice di partenza.

Possiamo quindi invertire le relazioni (4):

$$A = S_{i,j}A'; \qquad A = H_i(\frac{1}{\alpha})A''; \qquad A = H_{i,j}(-\beta)A'''. \tag{5}$$

Abbiamo visto come ogni matrice possa essere trasformata in una matrice in forma a scala mediante operazioni elementari sulle righe. Poiché un'operazione elementare corrisponde alla moltiplicazione per una matrice elementare, possiamo riassumere la teoria sin qui vista nella seguente

Proposizione 2 *Se* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, *esiste una matrice invertibile* $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tale che la matrice* HA *sia in forma a scala per righe.*

Questa proposizione segue dal teorema 1 qui sotto. La matrice H è il prodotto delle matrici elementari utilizzate per portare A in forma a scala. Siccome esistono più modi di portare A in forma a scala, la matrice H non è unica.

Definizione 2 *Diremo che una matrice è in* forma a scala speciale *per righe se è in forma a scala e se tutti i suoi pivots sono uguali ad 1.*

È ovvio come passare da una matrice in forma a scala ad una matrice in forma a scala speciale: se un pivot non è uguale ad 1, possiamo dividere tale riga per il pivot (che è non nullo per definizione di pivot). Dalla proposizione 2, eventualmente moltiplicando ancora per matrici elementari di tipo $H_i(\alpha)$, ricaviamo quindi:

Corollario 2 *Se* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, *esiste una matrice invertibile* $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tale che la matrice* HA *sia in forma a scala speciale per righe.*

Sia U una forma a scala speciale per righe di A (come visto nell'esempio 3, una tale matrice è triangolare superiore). Dalle formule (5) deduciamo che esiste una matrice invertibile E (che poi è l'inversa di H) tale che $A = EU$. Vogliamo determinare simultaneamente la matrice speciale U e la matrice E, o meglio una sua variante.

Definizione 3 *Diremo che una matrice* P *è una* matrice di permutazione *se* P *è un prodotto di matrici di scambio* $S_{i,j}$.

Per una matrice di scambio $S_{i,j}$, dal lemma 2 segue che $S_{i,j}^{-1} = S_{i,j} = S_{i,j}^T$. Questa è una proprietà che si conserva nel prodotto[1], quindi il calcolo dell'inversa di una matrice di permutazione è molto semplice: $P^{-1} = P^T$. Con una terminologia che introdurremo più avanti, P è una matrice *ortogonale*.

Il teorema principale di questo paragrafo afferma che ogni matrice si può scrivere come prodotto di una matrice di permutazione, una matrice triangolare inferiore ed una superiore.

Teorema 1 *(Decomposizione LU) Se A è una matrice $n \times m$, esistono:*

1) una matrice di permutazione $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

2) una matrice invertibile triangolare inferiore $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dall'inglese lower triangular*);*

*3) una matrice in forma a scala speciale per righe $U \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ (*upper triangular*)*

tali che $PA = LU$ (equivalentemente: $A = P^T LU$).

Per giustificare il perché una tale decomposizione sia ragionevole conviene guardare al procedimento di riduzione in forma a scala per righe dal punto di vista delle colonne. Se una data colonna della matrice ridotta contiene il pivot della i-esima riga, la matrice di partenza deve avere un coefficiente non nullo sulla stessa colonna, dalla i-esima riga in giù.
Se il coefficiente sulla i-esima riga non è nullo, nella riduzione in forma a scala annullo i rimanenti coefficienti sottraendo alle righe inferiori multipli della i-esima, cioé utilizzo solo matrici di tipo $H_{i,j}(\beta)$ con $j < i$, che sono triangolari inferiori (esempio 4). La L è il prodotto di tutte queste (e delle $H_i(\alpha)$ per avere tutti i pivot uguali ad 1). Quindi è triangolare per il lemma 1.
Se invece il coefficiente sulla i-esima riga è nullo, devo fare uno scambio di righe. La P è il prodotto di tutti questi scambi.

Le considerazioni precedenti costituiscono il succo della costruzione della decomposizione LU. Sfortunatamente, una dimostrazione rigorosa del teorema richiede notazioni più pesanti. Il lemma seguente formalizza il procedimento di riduzione appena descritto. La costruzione della decomposizione è un'applicazione ripetuta di questo lemma alternata a scambi di righe quando necessario.

Lemma 3 *Sia $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{c}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{n1})^T$ la sua prima colonna. Supponiamo che $a_{11} \neq 0$. Allora A si scrive come prodotto $A = \mathcal{L}(A)\mathcal{R}(A)$ delle due matrici seguenti:*

- *$\mathcal{L}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le cui colonne sono $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$;*
- *$\mathcal{R}(A) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la matrice ottenuta da A riducendone la prima colonna, cioé:*
  - *a) dividendo la prima riga per a_{11} e poi*
  - *b) per $i = 2, \ldots, n$, sottraendo alla i-esima riga la prima moltiplicata per a_{i1}.*

Inoltre, le matrici $\mathcal{L}(A)$ ed $\mathcal{R}(A)$ ammettono le decomposizioni in blocchi:

$$\mathcal{L}(A) = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline a_{21} & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ a_{n1} & & & \end{array}\right); \qquad \mathcal{R}(A) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1m}}{a_{11}} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{6}$$

per un'opportuna matrice $D_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1,m-1}(\mathbb{R})$. In particolare $\mathcal{L}(A)$ è triangolare superiore.

[1]Ricordiamo che per matrici qualsiasi $(XY)^T = Y^T X^T$ e che per matrici invertibili $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$.

Dimostrazione. Il lemma è più lungo da enunciare che da dimostrare. Infatti, da quanto detto sopra, risulta:

$$\mathcal{R}(A) = H_{n,1}(-a_{n1}) \cdots H_{2,1}(-a_{21}) H_1(\frac{1}{a_{11}}) A \quad \Longrightarrow \quad H_1(a_{11}) H_{2,1}(a_{21}) \cdots H_{n,1}(a_{n1}) \mathcal{R}(A) = A$$

e si conclude osservando che $\mathcal{L}(A) = H_1(a_{11}) H_{2,1}(a_{21}) \cdots H_{n,1}(a_{n1})$ (basta ricordare come queste matrici agiscono su I_n).

Esempio 5 Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare la matrice $\mathcal{R}(A)$ divido la prima riga di A per 2 ed ottengo $(1, 0, 1, 2)$, che è la prima riga di $\mathcal{R}(A)$. La seconda (risp. terza) riga di $\mathcal{R}(A)$ si ottengono sottraendo (risp. sommando) alla seconda e terza riga di A la riga $(1, 0, 1, 2)$. Quindi

$$\mathcal{L}(A) = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right); \qquad \mathcal{R}(A) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Decomposizione LU: procedimento. Sia A la matrice di partenza. Nella pratica le matrici L e P si costruiscono man mano che si procede nella riduzione di A. Partiamo con $P = I_n$ mentre la L la scriviamo una colonna alla volta. Cominciamo dalla prima colonna non nulla di A (la prima che produrrà un pivot):

- Se il coefficiente sulla prima riga di questa colonna è $\neq 0$, lascio $P = I_n$ e sulla prima colonna di L copio la prima colonna di A. Sostituisco A con la matrice ottenuta da A riducendone la prima colonna come nel lemma 3.

- Se il coefficiente sulla prima riga è 0, faccio uno scambio di righe per ricondurmi al caso precedente. Registro questo scambio in P e procedo come al caso precedente.

Procediamo ripetendo i passi precedenti per la seconda, terza, ... colonna. Supponiamo di aver compiuto k passi, cioè di aver costruito una certa P, le prime k colonne di L ed una matrice U_k ottenuta da A riducendone le prime k righe. Consideriamo la colonna di U_k che produrrà il prossimo pivot, cioè la prossima colonna $(c_1, \ldots, c_k, c_{k+1}, \ldots, c_n)^T$ che ha un coefficiente non nullo dalla $k+1$-esima riga in giù:

- Se $c_{k+1} \neq 0$, lascio P invariata e scrivo la $k+1$-esima colonna di L: $(0, \ldots, 0, c_{k+1}, \ldots, c_n)^T$. Sostituisco U_k con la matrice ottenuta dividendo la $k+1$-esima riga per c_{k+1} e poi, per $i = k+2, \ldots, n$, sottraendo alla i-esima riga la $k+1$-esima moltiplicata per c_i.

- Se $c_{k+1} = 0$, faccio uno scambio di righe per ricondurmi al caso precedente. Effettuo questo scambio anche su P e sulla matrice L costruita finora. Riduco U_k come al caso precedente.

Il procedimento termina al passo $k = \min\{n, m\}$: le ultime matrici prodotte sono le P, L ed U cercate.

Esempio 6 Calcoliamo la decomposizione LU della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

La prima colonna che produrrà un pivot è la seconda, il coefficiente sulla prima riga è non nullo quindi:

$$P = I_3; \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & & \\ 2 & & \end{pmatrix}, \qquad U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La prossima colonna che produrrà un pivot è la quarta, il coefficiente sulla seconda riga è nullo quindi devo scambiare seconda e terza riga (nella L oltre che nella U_1):

$$P = S_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 2 & 1 & \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice U_2 è già in forma a scala, devo solo far diventare 1 l'ultimo pivot per renderla speciale:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad U = U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per verificare di non aver fatto errori di conto si deve controllare che effettivamente $PA = LU$.

Dimostrazione del Teorema 1. Si tratta di formalizzare il procedimento enunciato qui sopra (e di dimostrare perché funziona!). Se A è la nostra matrice, poniamo

$$P_0 = L_0 = I_n; \qquad U_0 = A.$$

Dopo k passi determineremo una matrice di permutazione P_k e due matrici a blocchi

$$L_k = \left(\begin{array}{c|c} L'_k & \mathbf{0} \\ \hline C_{n-k} & I_{n-k} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \qquad U_k = \left(\begin{array}{c|c} U'_k & B_k \\ \hline \mathbf{0} & D_{n-k} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \tag{7}$$

con L'_k quadrata triangolare inferiore (e quindi anche L_k è triangolare inferiore), U'_k in forma a scala speciale. Nei vari blocchi, l'indice (k o $n-k$) indica il numero di righe. Tali matrici verificheranno la relazione

$$P_k A = L_k U_k. \tag{8}$$

Il procedimento termina al passo $k = \min\{n, m\}$: le ultime matrici prodotte sono le P, L ed U cercate.
Vogliamo continuare a utilizzare le notazioni del lemma 3 anche per matrici con le prime colonne nulle. Data $M = (\mathbf{0} \,|\, N)$, scriveremo $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$ e $\mathcal{R}(M) = (\mathbf{0} \,|\, \mathcal{R}(N))$. La fattorizzazione $M = \mathcal{L}(M)\mathcal{R}(M)$ è una conseguenza immediata del lemma 3.

Algoritmo. Supponiamo, per $k < \min\{n, m\}$, di aver costruito le matrici P_k, L_k ed U_k come in (7) e soddisfacenti la relazione (8). Dobbiamo costruire P_{k+1}, L_{k+1} e U_{k+1}.

Lavoreremo sull'ultimo blocco D_{n-k} di U_k. Si presentano due alternative in funzione della prima colonna non nulla di D_{n-k}:

$$\begin{pmatrix} d_{1,j} \\ \vdots \\ d_{n-k,j} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{d_{1,j} \neq 0}$ Riduciamo la prima colonna: $D_{n-k} = \mathcal{L}(D_{n-k})\mathcal{R}(D_{n-k})$ e poniamo

$$P_{k+1} = P_k; \qquad L_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} L'_k & \mathbf{0} \\ \hline C_{n-k} & \mathcal{L}(D_{n-k}) \end{array}\right); \qquad U_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} U'_k & B_k \\ \hline \mathbf{0} & \mathcal{R}(D_{n-k}) \end{array}\right) \tag{9}$$

$\boxed{\exists i \ d_{i,j} \neq 0}$ Siano C^*_{n-k} e D^*_{n-k} le matrici ottenute da C_{n-k} e D_{n-k} scambiando la prima e la i-esima riga. Riduciamo la prima colonna: $D^*_{n-k} = \mathcal{L}(D^*_{n-k})\mathcal{R}(D^*_{n-k})$ e poniamo:

$$P_{k+1} = S_{k+1,k+i}P_k; \qquad L_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} L'_k & \mathbf{0} \\ \hline C^*_{n-k} & \mathcal{L}(D^*_{n-k}) \end{array}\right); \qquad U_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} U'_k & B_k \\ \hline \mathbf{0} & \mathcal{R}(D^*_{n-k}) \end{array}\right) \quad (10)$$

Giustificazione. Dobbiamo spiegare perché le matrici definite dalle formule (9) e (10) sono del tipo richiesto, cioé che le partizioni in blocchi di L_{k+1} ed U_{k+1} associate alle decomposizioni $n = (k+1) + (n-k-1)$ ed $m = (k+1) + (m-k-1)$ sono del tipo

$$L_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} L'_{k+1} & \mathbf{0} \\ \hline C_{n-k-1} & I_{n-k-1} \end{array}\right); \quad U_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} U'_{k+1} & B_{k+1} \\ \hline \mathbf{0} & D_{n-k-1} \end{array}\right) \tag{11}$$

(con L'_{k+1} triangolare inferiore ed U'_{k+1} a scala speciale) e che vale la relazione:

$$P_{k+1}A = L_{k+1}U_{k+1}. \tag{12}$$

$\boxed{d_{1,j} \neq 0}$ Poiché $P_{k+1} = P_k$, la (12) segue dalla (8) se dimostriamo che $L_kU_k = L_{k+1}U_{k+1}$. Visto che le nuove matrici sono definite a partire dalla fattorizzazione $D_{n-k} = \mathcal{L}(D_{n-k})\mathcal{R}(D_{n-k})$, questo segue dal dal corollario 1:

$$\left(\begin{array}{c|c} L'_k & \mathbf{0} \\ \hline C_{n-k} & I_{n-k} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U'_k & B_k \\ \hline \mathbf{0} & D_{n-k} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L'_k & \mathbf{0} \\ \hline C_{n-k} & \mathcal{L}(D_{n-k}) \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U'_k & B_k \\ \hline \mathbf{0} & \mathcal{R}(D_{n-k}) \end{array}\right).$$

Dal lemma 3, ed in particolare dalla formula (6), ricaviamo che:

$$L'_{k+1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & L'_k & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline c_{11} & \dots & c_{1k} & d_{11} \end{array}\right); \qquad U'_{k+1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & b_{11} & \dots & b_{1j} \\ & U'_k & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{k1} & \dots & b_{kj} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

(dove $(c_{11}, \dots, c_{1,k})$ è la prima riga di C_{n-k} ed i b_{**} sono i coefficienti di B_k). Sempre dalla (6), vediamo che gli ultimi $n-k-1$ coefficienti delle prime $j+1$ colonne di $\mathcal{R}(D_{n-k})$ sono nulli, quindi il blocco formato dalle ultime righe e prime colonne di U_{k+1} è nullo: la decomposizione è dunque del tipo (11).

$\boxed{\exists i \ d_{i,j} \neq 0}$ Le matrici L_{k+1} ed U_{k+1} sono costruite applicando il procedimento precedente a

$$L^*_k = \left(\begin{array}{c|c} L'_k & \mathbf{0} \\ \hline C^*_{n-k} & I_{n-k} \end{array}\right) \qquad \text{e} \qquad U^*_k = \left(\begin{array}{c|c} U'_k & B_k \\ \hline \mathbf{0} & D^*_{n-k} \end{array}\right)$$

(lo scambio di righe è stato fatto in modo che l'elemento di posto $(1,j)$ di D^*_{n-k} sia $\neq 0$). Pertanto la dimostrazione del fatto che P_{k+1}, L_{k+1} ed U_{k+1} soddisfano le relazioni (11) e (12) segue dal caso precedente una volta dimostrato che

$$P_{k+1}A = L^*_k U^*_k.$$

Se indichiamo con $Z_{i,1}$ la matrice ottenuta scambiando la prima e la i-esima riga di I_{n-k}, allora

$$S_{k+i,k+1} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & Z_{i,1} \end{array}\right); \qquad C^*_{n-k} = Z_{i,1}C_{n-k}; \qquad D^*_{n-k} = Z_{i,1}D_{n-k}. \tag{13}$$

Ricordando che $S^2_{k+i,k+1} = I_n$ (lemma 2) ed utilizzando ripetutamente il corollario 1 e le (13):

$$\begin{aligned}
P_{k+1}A &= S_{k+i,k+1}P_kA = S_{k+i,k+1}L_kU_k = S_{k+i,k+1}L_kS^2_{k+i,k+1}U_k \\
&= [S_{k+i,k+1}L_kS_{k+i,k+1}]\,[S_{k+i,k+1}U_k] \\
&= \left[\left(\begin{array}{c|c} I_k & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & Z_{i,1}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} L'_k & \mathbf{0} \\ \hline C_{n-k} & I_{n-k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_k & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & Z_{i,1}\end{array}\right)\right]\left[\left(\begin{array}{c|c} I_k & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & Z_{i,1}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U'_k & B_k \\ \hline \mathbf{0} & D_{n-k}\end{array}\right)\right] \\
&= \left[\left(\begin{array}{c|c} L'_k & \mathbf{0} \\ \hline Z_{i,1}C_{n-k} & Z_{i,1}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_k & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & Z_{i,1}\end{array}\right)\right]\left(\begin{array}{c|c} U'_k & B_k \\ \hline \mathbf{0} & Z_{i,1}D_{n-k}\end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} L'_k & \mathbf{0} \\ \hline Z_{i,1}C_{n-k} & I_{n-k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U'_k & B_k \\ \hline \mathbf{0} & Z_{i,1}D_{n-k}\end{array}\right) = L^*_k U^*_k.
\end{aligned}$$

Esempio 7 Calcoliamo la decomposizione LU della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

utilizzando le notazioni della dimostrazione del teorema 1. Il primo passo è dato dall'esempio 5:

$$P_1 = I_3; \qquad L_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right); \qquad U_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Il prossimo pivot si trova sull'ultima riga, quindi devo scambiare

- la seconda e terza riga di U_1;
- gli elementi sula seconda e terza riga della prima colonna di L_1:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad L^*_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right); \qquad U^*_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

[Attenzione! Non si devono scambiare le ultime due righe di L_1, solo gli elementi sulla prima colonna (la matrice L costruita finora).]
Adesso devo solo dividere la seconda riga di U^*_1 per 2. Il secondo passo è quindi

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad L_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right); \qquad U_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Per concludere devo moltiplicare l'ultima riga di U_2 per -1 in modo da avere l'ultimo pivot uguale ad 1. L'ultimo passo è quindi

$$P = P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad L = L_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad U = U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per verificare di non aver fatto errori di conto si deve controllare che effettivamente $PA = LU$.

Applicazione alla risoluzione di sistemi lineari. Dato un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sia $PA = LU$ la decomposizione della matrice A. Poiché P è invertibile, il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette soluzione se e solo se il sistema $PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, uguale al sistema $LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, ammette soluzione. Dato che L è invertibile, il sistema lineare

$$L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$$

ammette un'unica soluzione. Siccome L è triangolare inferiore, questo sistema è facile da risolvere per sostituzioni successive. Se chiamiamo $\mathbf{y}_0$ la soluzione, il sistema di partenza ammette soluzione se e solo se il sistema

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}_0$$

ammette soluzione. Questo è facile da stabilirsi, visto che la matrice incompleta U è in forma a scala. Se ci sono soluzioni, si trovano facilmente per sostituzioni successive.

Esempio 8 Cerchiamo le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Abbiamo calcolato nell'esempio 7 la decomposizione della matrice incompleta. Il sistema $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e l'unica soluzione è $\mathbf{y}_0 = (0, 0, -1)^T$. Poiché U ha rango 3, il sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{v}$ ammette sempre soluzione (quale che sia il termine noto $\mathbf{v}$) e l'insieme delle soluzioni è una varietà lineare di dimensione 1. Nel nostro caso il sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_4 = -1 \\ x_3 = -2x_4 - x_2 = 2 - x_2 \\ x_1 = -x_3 - 2x_4 = x_2 \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono date dai vettori $(x_2, x_2, 2-x_2, -1)^T = (0, 0, 2, -1)^T + < (1, 1, -1, 0)^T >$.

3 Cenni sulla teoria di Jordan

Definizione 4 *Diremo* blocco di Jordan *di dimensione n e di autovalore λ la matrice $J_{n,\lambda} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definita dalle proprietà seguenti:*

a) Gli elementi sulla diagonale sono tutti uguali a λ;

b) Gli elementi di posto $(i, i+1)$ sono tutti uguali ad 1, per $i = 1, \ldots, n-1$;

c) Tutti gli altri elementi sono nulli, in particolare $J_{n,\lambda}$ è triangolare superiore.

Come esempio abbiamo quindi i seguenti blocchi di dimensione 1, 2, 3:

$$J_{1,\lambda} = (\lambda); \qquad J_{2,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \qquad J_{3,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Osserviamo innanzitutto che $p_{J_{n,\lambda}}(t) = (\lambda - t)^n$. Inoltre il rango di $(J_{n,\lambda} - \lambda I_n)$ è $n-1$ quindi l'autospazio V_λ per la matrice $J_{n,\lambda}$ ha dimensione 1.

Se L è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$, dire che la matrice di L in una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è $J_{n,\lambda}$, vuol dire che:

$$L(\mathbf{v}_1) = \lambda \mathbf{v}_1, \quad L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2, \quad \ldots \quad L(\mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_{n-1} + \lambda \mathbf{v}_n. \tag{14}$$

Quindi $\mathbf{v}_1$ è un autovettore di autovalore λ mentre $\mathbf{v}_2$ soddisfa la relazione $L(\mathbf{v}_2) - \lambda \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ e poi $\mathbf{v}_3$ soddisfa la relazione $L(\mathbf{v}_3) - \lambda \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ così via. I vettori $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$,... si dicono *autovettori generalizzati*.
Sia A la matrice di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$: come sappiamo le coordinate del vettore $\mathbf{v}_1$ saranno soluzione del sistema omogeneo:

$$(A - \lambda I_n)X = 0.$$

Supponiamo che queste coordinate siano $(a_1, \ldots, a_n)$: le coordinate del vettore $\mathbf{v}_2$ sono allora soluzione del sistema *non omogeneo*:

$$(A - \lambda I_n)X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Supponiamo di averle calcolate e di aver scelto la soluzione $(b_1, \ldots, b_n)$: le coordinate del vettore $\mathbf{v}_3$ sono allora soluzione del sistema non omogeneo

$$(A - \lambda I_n)X = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

e così via ...

Definizione 5 *Una* matrice di Jordan *è una matrice quadrata a blocchi tale che*

a) i blocchi lungo la diagonale sono blocchi di Jordan;

b) i blocchi esterni alla diagonale sono matrici nulle.

In particolare, una matrice di Jordan è triangolare superiore ed i suoi elementi non nulli si trovano o sulla diagonale o sopra un elemento della diagonale cioè se $a_{i,j} \neq 0$ allora $j = i$ oppure $j = i + 1$ (e in questo secondo caso $a_{i,i+1} = 1$).
Ovviamente, un blocco di Jordan è una matrice di Jordan con un solo blocco lungo la diagonale.
Una matrice diagonale $n \times n$ è una matrice di Jordan con n blocchi 1×1 lungo la diagonale.
Ecco degli esempi di matrici di Jordan con due blocchi lungo la diagonale

$$\left(\begin{array}{c|cc} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{c|cc} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{array}\right)$$

ed ancora degli esempi di matrici di Jordan con tre blocchi lungo la diagonale:

$$\left(\begin{array}{c|c|cc} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{cc|c|c} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mu & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \nu \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{cc|cc|c} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{ccc|c|c} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \end{array}\right).$$

Data una qualunque matrice quadrata A ci siamo posti il problema di trovare una matrice simile ad A che abbia la forma *più semplice possibile*. La soluzione migliore si ha quando A è diagonalizzabile, cioè simile ad una matrice diagonale. Come abbiamo visto, A è diagonalizzabile se e solo se sono soddisfatte due condizioni:

a) il polinomio caratteristico $p_A(t)$ è completamente riducibile;

b) le molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore coincidono.

Cosa possiamo dire se queste condizioni non sono soddisfatte? Se la prima condizione non è verificata, possiamo sempre decidere di spostare il problema da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$: per il teorema fondamentale dell'algebra, ogni polinomio $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ è completamente riducibile.
E se invece è la seconda condizione a non essere soddisfatta? Come abbiamo visto, gli esempi più semplici sono dati da matrici che sono blocchi di Jordan di dimensione almeno 2. Più in generale, lo stesso vale per una matrice di Jordan che non sia diagonale. D'altra parte non possiamo certo sperare di trovare una matrice ancora più semplice! Per il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, possiamo sempre ricondurci a matrici di Jordan.

Teorema 2 *Sia A una matrice quadrata $n \times n$ il cui polinomio caratteristico sia completamente riducibile. Allora A è simile ad una matrice di Jordan. Inoltre, se J è una matrice di Jordan simile ad A e se λ è un autovalore di A, allora per i blocchi di autovalore λ in J abbiamo che:*

a) il numero di tali blocchi è pari alla molteplicità geometrica di λ;

b) la somma delle dimensioni di tali blocchi è pari alla molteplicità algebrica di λ.

Osserviamo che, se per un autovalore λ la molteplicità geometrica $m_g(\lambda)$ coincide con la molteplicità algebrica $m_a(\lambda)$, nella J i blocchi relativi a λ saranno $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, necessariamente tutti di dimensione uno. In particolare, se questo vale per ogni λ, la matrice J è diagonale, come del resto risulta dal criterio di diagonalizzazione.

Per matrici con autovalori di molteplicità basse, la ricerca della forma canonica di Jordan non presenta difficoltà in più rispetto alla diagonalizzazione.

Esempio 9 Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è $p(t) = t^2(1-t)$, quindi 1 è autovalore di molteplicità $m_g(1) = m_a(1) = 1$. Anche 0 è autovalore con $m_a(0) = 2$ ed $m_g(0) = 3 - \operatorname{rg} A = 1$. Quindi A è simile a $J = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. La prima e la seconda colonna di una matrice H tale che $H^{-1}AH = J$, sono date dai generatori degli autospazi di A:

$$V_1 = \ker A - I =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >; \qquad V_0 = \ker A =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} > .$$

L'ultima colonna di H deve essere una soluzione del sistema non omogeno che ha come colonna dei termini noti un autovettore di V_0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Longrightarrow \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In generale, per un dato autovalore λ con $m_g(\lambda) \lneqq m_a(\lambda)$ dobbiamo affrontare due problemi:

1) Determinare numero e dimensione dei blocchi associati a λ.

Ad esempio, se $m_g(\lambda) = 2$ e $m_a(\lambda) = 4$, il teorema 2 ci dice che avremo due blocchi di autovalore λ e che la somma delle dimensioni di questi blocchi è 4, ma non siamo in grado di decidere se ci sono due blocchi di dimensione 2 oppure un blocco di dimensione 1 ed uno di dimensione 3.

2) Determinare per quali autovettori $\mathbf{v} \in V_\lambda$ il sistema $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{v}$ ammette soluzione.

Questo ci interessa per determinare le colonne della matrice H del cambiamento di base che non corrispondono ad autovettori. Non tutti gli autovettori infatti danno origine ad autovettori generalizzati.

Esempio 10 Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, il suo polinomio caratteristico è $p(t) = -t^3$, quindi 0 è autovalore di molteplicità $m_a(0) = 3$ ed $m_g(0) = 3 - \operatorname{rg} A = 2$. Quindi A è simile a $J = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Abbiamo $V_0 = \ker A =< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} >$. Sfortunatamente, i sistemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

danno luogo ad una equazione $0 = -1$ e non sono quindi risolubili. Non sappiamo come trovare la seconda colonna di H!

Per risolvere questo problema, osserviamo che se $\mathbf{v}_1$ è autovettore di autovalore λ e se $\mathbf{v}_2$ è soluzione di $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ allora $(A - \lambda I)^2\mathbf{v}_2 = (A - \lambda I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. In altre parole, $\mathbf{v}_2 \notin \ker(A - \lambda I)$ ma $\mathbf{v}_2 \in \ker(A - \lambda I)^2$ (osserviamo che, banalmente, $\ker(A - \lambda I) \subseteq \ker(A - \lambda I)^2$). Se $\mathbf{v}_1$ corrisponde ad un blocco di Jordan di dimensione n, cioè se esistono $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ che soddisfano le relazioni (14), allora

$$(A - \lambda I)^{n-1}\mathbf{v}_n = (A - \lambda I)^{n-2}\mathbf{v}_{n-1} = \cdots = (A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

quindi $\mathbf{v}_n \notin \ker(A - \lambda I)^{n-1}$ ma $\mathbf{v}_n \in \ker(A - \lambda I)^n$.

Esempio 10 (continua) Abbiamo $A^2 = \mathbf{0}$, quindi se $\mathbf{v}$ è un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^3 = \ker A^2$ avremo che $A\mathbf{v} \in \ker A$. Se scegliamo $\mathbf{v} \notin \ker A$ avremo che $A\mathbf{v}$ genera un blocco di Jordan di dimensione 2. Possiamo quindi prendere $A\mathbf{v}, \mathbf{v}$ come prime due colonne (attenzione all'ordine!) della matrice H: per la terza colonna, basta prendere un autovettore indipendente da $A\mathbf{v}$. Ad esempio scegliendo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ troviamo } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Complemento al Teorema 2 Poniamo $W_i(\lambda) = \ker(A - \lambda I)^i$ ed osserviamo che

$$W_0(\lambda) = \{\mathbf{0}\} = \ker(A - \lambda I)^0 \subsetneq W_1(\lambda) = \ker(A - \lambda I) \subseteq \cdots \subseteq W_i(\lambda) \subseteq W_{i+1}(\lambda) \subseteq \dots$$

Proposizione 3 *Il numero di blocchi di dimensione d di autovalore λ è pari a*

$$-\dim W_{d+1}(\lambda) + 2\dim W_d(\lambda) - \dim W_{d-1}(\lambda). \tag{15}$$

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui $A = J_{m,\lambda}$ è il blocco di Jordan di dimensione m di autovalore λ. Allora $A - \lambda I = J_{m,0}$ è il blocco di Jordan di dimensione m di autovalore 0. Se $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ è la base canonica di $\mathbb{R}^m$, abbiamo dunque

$$(A - \lambda I)\mathbf{e}_i = J_{m,0}\,\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i+1} \qquad \text{per } i = 1, \dots, m - 1.$$

Quindi $(A-\lambda I)^2\mathbf{e}_i = J_{m,0}^2\,\mathbf{e}_i = J_{m,0}\mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{e}_{i+2}$ per $i=1,\dots,m-2$ ed in generale

$$(A-\lambda I)^k\mathbf{e}_i = J_{m,0}^k\,\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i+k} \qquad \text{per } i=1,\dots,m-k.$$

Abbiamo quindi che

$$\dim\ker J_{m,0}^k = k \qquad \text{per} \quad k=1,\dots m \tag{16}$$

e che $\dim\ker J_{m,0}^k = m$ per $k\geq m$.
Calcoliamo la somma (15) per $A=J_{m,\lambda}$: abbiamo $W_d(\lambda)=\ker J_{m,0}^d$, quindi dalla (16) abbiamo:

$$\begin{array}{llll}
-(d+1) \quad +2d \quad -(d-1) & =0 & \text{per} & d<m\\
-(m) \qquad +2m \quad -(m-1) & =1 & \text{per} & d=m\\
-(m) \qquad +2m \quad -(m) & =0 & \text{per} & d>m
\end{array}$$

a conferma del fatto che per $A=J_{m,\lambda}$ abbiamo un solo blocco di dimensione m.

Consideriamo ora il caso di una matrice generale A. Sia L l'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha A come matrice rispetto alla base canonica. Il sottospazio $W_i(\lambda)=\ker(L-\lambda)^i$ dipende solo da L: possiamo cambiare A con una matrice ad essa simile, quindi possiamo pensare che A sia una matrice di Jordan. Allora anche $A-\lambda I$ è una matrice di Jordan: se $J_{m,\mu}$ è un blocco di A allora $J_{m,\mu-\lambda}$ è un blocco di $A-\lambda I$ (cioè $A-\lambda I$ ha gli stessi blocchi si A, ma di autovalori $\lambda_i-\lambda$). Se $\mu\neq\lambda$ allora $J_{m,\mu-\lambda}$ è invertibile (triangolare superiore con coefficienti non nulli sulla diagonale), così come le sue potenze $J_{m,\mu-\lambda}^i=(J_{m,\mu}-\lambda I)^i$, dunque non contribuisce alla dimensione dei $W_i(\lambda)$. Ci siamo così ricondotti al caso dei blocchi $J_{m,\lambda}$ studiato in precedenza e quindi la formula (15) è verificata.

Osservazione: $W_i(\lambda)\subseteq\mathbb{R}^n$ quindi $\dim W_i(\lambda)\leq n$: la dimensione degli spazi $W_i(\lambda)$ non può crescere oltre il limite n. Quindi esiste un intero $d\leq n$ tale che per $i\geq d$ si ha $W_i(\lambda)=W_{i+1}(\lambda)=W_{i+2}(\lambda)=\dots$. Dalla (15) segue quindi che non ci sono blocchi di dimensione $i>d$. In altre parole, d è la dimensione del blocco di Jordan più grande

Esempio 11 Consideriamo

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Abbiamo $p_A(t)=(2-t)^4(1-t)$, quindi $m_g(1)=m_a(1)=1$ mentre

$$V_2=W_1(2)=\ker(A-2I)=\ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix} =< \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} >.$$

Dunque $m_a(2)=4$ ed $m_g(2)=2$, quindi abbiamo sicuramente due blocchi. Per determinarne le dimensioni calcoliamo

$$W_2(2)=\ker(A-2I)^2=\ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} =< \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} >.$$

Dalla formula (15) ricaviamo dunque che ci sono $-3+4=1$ blocchi di dimensione 1. Il secondo blocco deve quindi avere dimensione 3, quindi A è simile a

$$J=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ sono le colonne della matrice del cambiamento di base H, allora $\mathbf{v}_1 = (A-2I)^2\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_2 = (A-2I)\mathbf{v}_3$ dove $\mathbf{v}_3 \in \ker(A-2I)^3$ non appartiene a $\ker(A-2I)^2$. Inoltre $\mathbf{v}_4$ è autovettore di autovalore 2 indipendente da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_5$ è autovettore di autovalore 1. Il problema è quindi determinare $\mathbf{v_3}$. Possiamo farlo sia calcolando $(A-2I)^3$ e determinandone il nucleo, oppure osservando che a sua volta $\mathbf{v}_2 = (A-2I)\mathbf{v}_3 \notin \ker(A-2I)$. Un vettore in $\ker(A-2I)^2$ che non sta in $\ker(A-2I)$ è dato da $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2$, quindi un possibile $\mathbf{v}_3$ ri ricava risolvendo $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_5 = 0 \\ x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

quindi una soluzione è data ad esempio da $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$. Di conseguenza $\mathbf{v}_1 = (A-2)^2\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_4$. Per completare la matrice H dobbiamo ancora calcolare $V_1 =< (1,0,0,0,-1)^T >$. Quindi

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4 Diagonalizzazione delle matrici simmetriche reali

Ricordiamo che una matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è detta *ortogonale* se $H^TH = I_n$. In altre parole, H è invertibile ed $H^{-1} = H^T$.

Definizione 6 *Diremo che una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è* ortogonalmente diagonalizzabile *se esistono una matrice diagonale D ed una matrice ortogonale H tali che $A = HDH^{-1} = HDH^T$.*

Equivalentemente, A è diagonalizzabile ed ammette una base *ortonormale* di autovettori. Per verificare che una matrice è ortogonalmente diagonalizzabile, basta verificare che è diagonalizzabile e che gli autospazi sono tra loro ortogonali: infatti col procedimento di Gram-Schmidt, possiamo costruire una base ortonormale per ciascun autospazio e, se questi autospazi sono tra loro ortogonali, l'unione di tutte queste basi, che è una base di $\mathbb{R}^n$ perché A è diagonalizzabile, è anche ortonormale.
Osserviamo innanzitutto che se A è ortogonalmente diagonalizzabile, A è necessariamente una matrice simmetrica. Infatti, ricordando che $(MN)^T = N^TM^T$:

$$A = HDH^T \quad \Rightarrow \quad A^T = \left(HDH^T\right)^T = HD^TH^T = HDH^T = A$$

In effetti, vale anche il viceversa, come afferma il seguente teorema:

Teorema 3 *Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica, è ortogonalmente diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare tre cose:

a) Il polinomio caratteristico $p_A(t)$ è completamente riducibile.

b) Gli autospazi di A sono tra loro ortogonali.

c) A è diagonalizzabile.

(a) Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ una radice di $p_A(t)$, quindi λ è un autovalore della matrice A pensata come matrice a coefficienti complessi: esiste quindi un vettore non nullo $Z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{C}^n$ tale che $AZ = \lambda Z$. Data una matrice $M = (m_{i,j})$ a coefficienti complessi, conveniamo di porre $\bar{M} = (\bar{m}_{i,j})$ la matrice ottenuta da M prendendo il coniugato di tutti i coefficienti. In particolare, preso $\bar{Z} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)^T$, osserviamo che

$$Z^T \bar{Z} = (z_1 \ldots z_n) \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} = z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$$

è un numero reale, positivo perché almeno uno degli z_i è diverso da zero. Chiamiamo $c = Z^T \bar{Z}$. Allora, poiché $A^T = A$ (perché A è simmetrica) ed $\bar{A} = A$ (perché A è a coefficienti reali), abbiamo

$$\lambda c = (\lambda Z)^T \bar{Z} = (AZ)^T \bar{Z} = Z^T A \bar{Z} = Z^T \overline{(AZ)} = Z^T \overline{(\lambda Z)} = \bar{\lambda} Z^T \bar{Z} = \bar{\lambda} c.$$

Quindi $c(\lambda - \bar{\lambda}) = 0$ e siccome $c \neq 0$, deve essere $\lambda = \bar{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.
Per il teorema fondamentale dell'algebra, $p_A(t)$ è completamente riducibile su $\mathbb{C}$ e, per quanto appena visto, tutte le sue radici sono reali: quindi $p_A(t)$ è completamente riducibile su $\mathbb{R}$.

(b) Siano $\lambda \neq \mu$ due autovalori di A e siano $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ed $Y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ autovettori di autovalore rispettivamente λ e μ, cioè $AX = \lambda X$ ed $AY = \mu Y$. Allora

$$\begin{aligned} \lambda(x_1, \ldots, x_n) \bullet (y_1, \ldots, y_n) &= (\lambda X^T)Y \\ &= (AX)^T Y \\ &= X^T AY \\ &= X^T(\mu Y) \\ &= \mu(x_1, \ldots, x_n) \bullet (y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Quindi $(\lambda - \mu)(x_1, \ldots, x_n) \bullet (y_1, \ldots, y_n) = 0$ e, siccome $\lambda \neq \mu$ deve essere

$$(x_1, \ldots, x_n) \bullet (y_1, \ldots, y_n) = 0.$$

Quindi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali. Pertanto gli autospazi di A sono a due a due ortogonali.

(c) Dimostriamo che A è diagonalizzabile per induzione su n. Se $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi che ogni matrice simmetrica $(n-1)\times(n-1)$ sia diagonalizzabile. Sia $\mathbf{v}$ un autovettore di A di autovalore λ e sia $W =< \mathbf{v} >^\perp$. Quindi W è un sottospazio di dimensione $n - 1$ ed abbiamo la decomposizione

$$\mathbb{R}^n =< \mathbf{v} > \oplus W.$$

Sia L l'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ definito da A (cioé l'endomorfismo che la cui matrice rispetto alla base canonica è A). Osserviamo che il trasformato $L(\mathbf{w})$ di un vettore $\mathbf{w} \in W$ mediante L appartiene ancora a W, cioè è ortogonale a $\mathbf{v}$. Infatti, indicando con $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ed $Y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ le coordinate di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ rispettivamente, allora

$$\mathbf{v} \bullet L(\mathbf{w}) = X^T(AY) = (AX)^T Y = \lambda X^T Y = \lambda(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}) = 0.$$

Quindi l'endomorfismo L manda il sottospazio $W = < \mathbf{v} >^\perp$ in se stesso. Scegliamo allora la base ortonormale $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ di $< \mathbf{v} >$ ed una base ortonormale $\{\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ di W (possiamo sempre trovarne una grazie al teorema di Gram-Schmidt). Unendole, otteniamo una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Quindi la matrice H del cambiamento di base in $\mathbb{R}^n$ dalla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ alla base canonica è una matrice ortogonale. La matrice $H^T AH$, che è ancora una matrice simmetrica, rappresenta l'endomorfismo L nella base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$.
Poiché $L(\mathbf{v}_1) = \lambda \mathbf{v}_1$ ed L manda il sottospazio W in sé stesso, questa matrice è della forma

$$H^T AH = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right). \quad \text{Poniamo} \quad B = \begin{pmatrix} b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Poiché $H^T AH$ è simmetrica, anche B è una matrice simmetrica. Per ipotesi induttiva, ogni matrice simmetrica $(n-1) \times (n-1)$ è diagonalizzabile. Quindi B è diagonalizzabile: esiste una matrice ortogonale $K \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ tale che $K^T BK$ sia diagonale. Dalla proposizione 1 segue allora che la matrice

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K^T & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

è diagonale. Pertanto A è simile ad una matrice diagonalizzabile e dunque è diagonalizzabile.

5 La serie esponenziale: sistemi di equazioni differenziali lineari

Ricordiamo che la funzione esponenziale ammette lo sviluppo in serie di potenze

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{17}$$

che converge assolutamente in tutto $\mathbb{R}$ ed uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato.
Il nostro punto di vista sarà di utilizzare la serie di potenze (17) come *definizione* della funzione esponenziale in vari contesti.

5.1 La funzione esponenziale nel campo complesso

La serie (17) definisce una funzione $\exp(z)$ per $z \in \mathbb{C}$. Utilizzando il modulo $|\ | : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ (ricordiamo che $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$), lo studio della convergenza di $\exp(z)$ si riconduce alla convergenza in $\mathbb{R}$: la funzone esponenziale converge assolutamente in $\mathbb{C}$. Per ogni fissato $z \in \mathbb{C}$ ed ogni $r \geq 0$, la serie converge uniformemente nel sottoinsieme $\{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq r\}$.

Proposizione 4 *$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$.*

Dimostrazione. Anche questa identità è una conseguenza immediata della convergenza della serie (17) a partire dalla formula del binomio di Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{dove} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{18}$$

Infatti

$$\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{a^k}{k!}\right)\left(\sum_{h=0}^{m}\frac{b^h}{h!}\right)=\sum_{n=0}^{2m}\sum_{h+k=n}\frac{a^k}{k!}\frac{b^h}{h!}=\sum_{n=0}^{2m}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{2m}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{n=0}^{2m}\frac{(a+b)^n}{n!}$$

da cui deduciamo:

$$\exp(a)\exp(b)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{a^h}{h!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}=\exp(a+b).$$

Teorema 4 (Formula di Eulero) *Per un numero complesso* $z=x+iy$

$$e^{x+iy}=e^x\left(\cos(y)+i\sin(y)\right).$$

Dimostrazione. Dalla proposizione 4 segue che $e^{x+iy}=e^xe^{iy}$, quindi basta dimostrare che $\exp(iy)=\cos(y)+i\sin(y)$. Ricordiamo gli sviluppi in serie delle funzioni trigonometriche

$$\cos(y)=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}y^{2k},\quad \sin(y)=y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}y^{2k+1}.$$

Le potenze intere dell'unità immaginaria si calcolano facilmente a partire dalla relazione $i^2=-1$: troviamo che $i^{2k}=(-1)^k$ e $i^{2k+1}=(i^{2k})i=(-1)^ki$. Separando i termini di grado pari da quelli di grado dispari in $\exp(iy)$ troviamo dunque:

$$\exp(iy)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iy)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}y^{2k}+i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}y^{2k+1}$$

cioè $\exp(iy)=\cos(y)+i\sin(y)$.

5.2 L'esponenziale di una matrice

Se A è una matrice $n\times n$ (a coefficenti reali o complessi) definiamo

$$\exp(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}. \tag{19}$$

Per giustificare il fatto che $\exp(A)$ sia una matrice dovremmo introdurre una nozione di distanza nello spazio delle matrici, cioè una *norma* sullo spazio delle matrici, in modo da poter dire che la successione delle somme parziali $\sum_{k=0}^{m}\frac{A^k}{k!}$ converge in $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Trascureremo questo aspetto, ammettendo il fatto che la serie (19) definisce una matrice.

Esempio 12 Se $D=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}$ è una matrice diagonale, $D^k=\begin{pmatrix} d_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^k\end{pmatrix}$ quindi

$$\exp(D)=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} \frac{d_1^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{d_n^k}{k!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_1^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_n^k}{k!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_n}\end{pmatrix}.$$

Proposizione 5 *Se A e B sono matrici simili, $A = HBH^{-1}$, allora* $\exp(A) = H\exp(B)H^{-1}$.

Dimostrazione. È un semplice calcolo:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(HBH^{-1}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{HB^kH^{-1}}{k!} = H\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\right)H^{-1} = H\exp(B)H^{-1}$$

In particolare, se A è diagonalizzabile, il calcolo di $\exp(A)$ si riconduce al caso diagonale considerato nell'esempio precedente.

Esempio 13 Se N è una matrice tale che $N^n = 0$ (una tale matrice si dice *nilpotente*) allora $N^k = N^n N^{k-n} = 0$ per $k \geq n$. La serie esponenziale si riduce ad una somma finita

$$\exp(N) = I_n + N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^n}{n!}.$$

Un caso particolare interessante è quello del blocco di Jordan di autovalore nullo $J_{n,0}$. Per esempio

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

o ancora

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{6} \\ & & & \ddots & 1 & \frac{1}{2} \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 14 In generale non è vero che $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Consideriamo ad esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dall'esempio precedente abbiamo $\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed anche $\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è simmetrica, quindi ortogonalmente diagonalizzabile:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e + \frac{1}{e} & e - \frac{1}{e} \\ e - \frac{1}{e} & e + \frac{1}{e} \end{pmatrix}$$

che non è uguale ad

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e neanche a

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Anzi, proprio il fatto che il prodotto di queste due matrici non commuta ci fa capire perché non possiamo aspettarci che l'esponenziale trasformi una somma di matrici (che è commutativa) in un prodotto di matrici (che non è commutativo).

Proposizione 6 *Se le matrici A e B commutano (cioè $AB = BA$) allora* $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

Dimostrazione. Identica a quella della proposizione 4: infatti la formula di Newton (18) si può usare per calcolare la potenza di un qualunque binomio i cui addendi commutino.

La proposizione si applica in particolare ad un blocco di Jordan $J_{n,\lambda} = \lambda I_n + J_{n,0}$: infatti la matrice scalare λI_n commuta con qualsiasi matrice.

Più in generale, se J è una matrice di Jordan, sia D la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli stessi coefficenti di J. Allora $N = J - D$ è una matrice di Jordan nilpotente: se i blocchi di J sono $J_{n_1,\lambda_1}, \ldots, J_{n_k,\lambda_k}$, i blocchi di N sono $J_{n_1,0}, \ldots, J_{n_1,0}$. Abbiamo quindi che $J = D + N$ e dalla regola per la moltiplicazione a blocchi (proposizione 1) segue immediatamente che D ed N commutano.
Quindi l'esponenziale di una matrice di Jordan è il prodotto dell'esponenziale di una matrice diagonale (esempio 12) per quello di una matrice nilpotente (esempio 13).
Infine la proposizione 5 permette di calcolare l'esponenziale di una qualunque matrice simile ad una matrice di Jordan, cioè, per il teorema 2, per ogni matrice che abbia un polinomio caratteristico completamente riducibile ed in particolare quindi ogni matrice a coefficenti complessi.

5.3 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine

L'interesse principale della funzione esponenziale in analisi è dato dalla proprietà di essere identica alla propria derivata. Anche questa proprietà analitica si può dedurre formalmente dalla serie di potenze (proposizione 8 più avanti).

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$. Abbiamo già visto che $\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale reale. Dalle proprietà della derivazione, segue che il sottoinsieme $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ delle funzioni derivabili in ogni punto di I è un sottospazio. Come di consueto, indichiamo con f' la derivata di f.
Fissiamo $a \in \mathbb{R}$ e consideriamo l'applicazione

$$L : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}, \qquad L(f) = f' - af.$$

Poiché la derivazione è lineare, L è un'applicazione lineare. Dalla teoria delle applicazioni lineari segue allora che:

Proposizione 7 *L'insieme* $\ker L$ *delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea $y' = ay$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{D}$.*
Data una funzione $f \in \mathcal{F}$, l'insieme $L^{-1}(f)$ delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' - ay = f$ è vuoto oppure una varietà lineare: ogni soluzione si ottiene sommando ad una soluzione particolare f_0 una soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata $y' = ay$.

Gli spazi $\mathcal{D}$ e $\mathcal{F}$ hanno dimensione infinita, quindi non siamo in grado a priori di calcolare la dimensione di $\ker L$ (né tantomeno di scrivere la matrice della L).

Proposizione 8 *La funzione* $\exp(at)$ *è soluzione dell'equazione differenziale $y' = ay$.*

Dimostrazione. Dato che la serie converge assolutamente ed uniformemente, possiamo derivarla termine a termine:

$$\frac{d}{dt}\exp(at) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\frac{(at)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^{n-1}}{(n-1)!} = a\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} = a\exp(at) \tag{20}$$

(dove nel penultimo passaggio abbiamo sostituito $m = n - 1$).

Abbiamo dunque che $< \exp(at) > \subseteq \ker L$. In effetti possiamo dimostrare che questa inclusione è un'uguaglianza. Osserviamo infatti che, se $g \in \ker L$, cioè $g' = ag$, allora g è anche derivabile due volte in ogni punto di I:

$$g'' = \left(g'\right)' = (ag)' = ag' = a^2 g.$$

Possiamo naturalmente ripetere il ragionamento: g è derivabile n volte in ogni punto di I e la derivata n-esima soddisfa $g^{(n)} = a^n g$, e questo per ogni $n \in \mathbb{N}$. Pertanto g è sviluppabile in serie di Taylor in ogni punto di I. Supponiamo per semplicità che $0 \in I$. Allora, siccome $g^{(n)}(0) = g(0)a^n$:

$$\begin{aligned} g &= g(0) + g'(0)t + \tfrac{g''(0)}{2}t^2 + \cdots + \tfrac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n + \ldots \\ &= g(0)\left(1 + at + \tfrac{1}{2}(at)^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}(at)^n + \ldots\right) = g(0)\exp(at) \end{aligned}$$

e dunque $\ker L =< \exp(at) >$: la soluzione generale dell'equazione $y' = ay$ è $c_0 e^{at}$, con c_0 costante.

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $y' - ay = f$ si trova con il *metodo di variazione della costante*: si cerca una soluzione della forma $c(t)e^{at}$, dove $c(t)$ è una funzione che determiniamo derivando:

$$\left(c(t)e^{at}\right)' - ac(t)e^{at} = \left(c'(t)e^{at} + ac(t)e^{at}\right) - ac(t)e^{at} = c'(t)e^{at} = f \quad \Rightarrow \quad c'(t) = e^{-at}f$$

dunque $c(t)$ è una primitiva di $e^{-at}f$. Per la proposizione 7, la soluzione generale di $y' - ay = f$ è la funzione $c(t)e^{at} + c_0 e^{at} = \left(c(t) + c_0\right)e^{at}$, con c_0 costante.

Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per risolvere un sistema di equazioni differenziali lineari omogeneo del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} y_1' & = a_{1,1}y_1 & + & \ldots & + \quad a_{1,n}y_n \\ \vdots & \quad \vdots & & & \qquad \vdots \\ y_n' & = a_{n,1}y_1 & + & \ldots & + \quad a_{n,n}y_n \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

che scriveremo anche $Y' = AY$. Un tale sistema può essere interpretato come la ricerca del nucleo di un'applicazione lineare

$$L : \mathcal{D}^n \to \mathcal{F}^n, \qquad L\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

dove $\mathcal{F}^n$ è lo spazio vettoriale reale delle n-ple di funzioni sull'intervallo I e $\mathcal{D}^n$ il sottospazio delle n-ple di funzioni derivabili. La proposizione seguente è dunque conseguenza dalla teoria delle applicazioni lineari.

Proposizione 9 *Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea $Y' = AY$ formano un sottospazio vettoriale. Per ogni $F = (f_1, \ldots, f_n)^T \in \mathcal{F}^n$, l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $Y' - AY = F$ è vuoto oppure una varietà lineare: ogni soluzione si ottiene sommando ad una soluzione particolare F_0 una soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata $Y' = AY$.*

Proposizione 10 *La matrice* $\exp(At)$ *soddisfa l'equazione* $\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At)$. *Le colonne della matrice* $\exp(At)$ *generano spazio vettoriale* $\ker L$ *delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea $Y' = AY$.*

Dimostrazione. La verifica che $\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At)$ è identica a quella della proposizione 8:

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} = A\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(At)^m}{m!} = A\exp(At).$$

Anche la seconda verifica è analoga a quella vista precedentemente: se $G = (g_1, \ldots, g_n)^T$ è soluzione di $G' = AG$, allora $G'' = (AG)' = A^2 G$ e quindi $G^{(n)} = A^n G$: le funzioni g_i sono arbitrariamente derivabili e possiamo sviluppare G in serie di Taylor. Siccome $G^{(n)}(0) = A^n G(0)$,

$$\begin{aligned} G &= G(0) + G'(0)t + \tfrac{G''(0)}{2}t^2 + \cdots + \tfrac{G^{(n)}(0)}{n!}t^n + \ldots \\ &= \left(1 + At + \tfrac{1}{2}(At)^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}(At)^n + \ldots\right) G(0) = \exp(At)G(0). \end{aligned}$$

Dunque G si ottiene moltiplicando la matrice $\exp(At)$ per il vettore costante $G(0) \in \mathbb{R}^n$, dunque G è combinazione lineare delle colonne di $\exp(At)$.

Anche in questo caso, una soluzione particolare di $Y' - AY = F$ si calcola mediante il metodo di variazione della costante.

5.4 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine superiore

Riprendiamo le notazioni della sezione 5.3, ed in particolare indichiamo con $f^{(k)}$ la derivata k-esima di f. Indichiamo con $\mathcal{D}^{(n)} \subseteq \mathcal{F}$ il sottospazio delle funzioni derivabili n volte in ogni punto di I. Consideriamo un'applicazione

$$L : \mathcal{D}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}, \qquad L(f) = f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f$$

dove i coefficenti $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sono costanti. Poiché la derivazione è lineare, L è un'applicazione lineare. Dalla teoria delle applicazioni lineari segue allora che:

Proposizione 11 *L'insieme* $\ker L$ *delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{21}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{D}^{(n)}$.
Data una funzione $f \in \mathcal{F}$, l'insieme $L^{-1}(f)$ delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f$$

è vuoto oppure una varietà lineare: ogni soluzione si ottiene sommando ad una soluzione particolare f_0 una soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata (21).

La ricerca delle soluzioni dell'equazione di ordine n si riconduce al quella di un sistema di equazioni del primo ordine. Infatti, se y è soluzione di

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{22}$$

ponendo $z = y'$ abbiamo che $z' = y''$, dunque $(y, z)^T$ è soluzione del sistema

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -a_0 y - a_1 z \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Analogamente, ponendo $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $\ldots$, $y_n = y^{(n-1)}$, la ricerca delle soluzioni dell'equazione (21) si riconduce a quella del sistema di equazioni differenziali lineari omogeneo del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ \vdots & \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \cdots - a_{n-1} y_n \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad Y' = CY$$

dove la matrice C, detta *matrice compagna* dell'equazione (21), è

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Per la proposizione 10, una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione $Y' = CY$ è data dalle colonne della matrice $\exp(Ct)$. Lo spazio vettoriale $\ker L$ delle soluzioni dell'equazione (21) è quindi generato dai coefficenti di $\exp(Ct)$.
Come visto alla fine della sezione 5.2, se J è una forma di Jordan (eventualmente diagonale) di C ed H la matrice del cambiamento di base, allora $\exp(Ct) = H \exp(Jt) H^{-1}$. In particolare, i coefficienti di $\exp(Ct)$ sono combinazioni lineari dei coefficienti di $\exp(Jt)$, che sono più facili da calcolare.
Per quanto riguarda il calcolo degli autovalorori di C, e quindi della forma J, osserviamo che il polinomio caratteristico della matrice C è

$$p_C(x) = \det(C - xI_n) = (-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)$$

e l'equazione $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ è chiamata, per ovvi motivi, *equazione caratteristica* dell'equazione differenziale (21).

Vediamo in dettaglio il caso dell'equazione (22) di ordine 2. Siano λ e μ le radici (in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$) del polinomio caratteristico

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -a_0 & -a_1 - x \end{pmatrix} = x^2 + a_1x + a_0 = (x - \lambda)(x - \mu).$$

$\boxed{\lambda \neq \mu}$ In questo caso la matrice è diagonalizzabile (in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$): lo spazio $\ker L$ delle soluzioni di (22) è generato dai cefficenti di

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \mu t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

e quindi lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione (22) ammette la base $\{e^{\lambda t}, e^{\mu t}\}$.
Osserviamo che, se λ e μ non sono reali, ponendo $\lambda = \alpha + i\beta$ (e quindi $\mu = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$), dalla formula di Eulero (teorema 4) risulta:

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)); \qquad e^{\mu t} = e^{\alpha t - i\beta t} = e^{\alpha t}(-\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

e dunque anche le funzioni di variabile reale

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) = \frac{1}{2}(e^{\lambda t} - e^{\mu t}), \qquad e^{\alpha t} \sin(\beta t) = \frac{1}{2i}(e^{\lambda t} + e^{\mu t})$$

formano una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione (22).

$\boxed{\lambda = \mu}$ In questo caso la matrice non è diagonalizzabile e la sua forma di Jordan è $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
Poiché $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, abbiamo

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Concludiamo dunque che le funzioni $\left\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\right\}$ formano una base dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione (22).

Esempio 15 Consideriamo l'equazione $y''' - y = 0$. La matrice compagna e polinomio caratteristico sono:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad p_C(x) = -(x^3 - 1) = -(x-1)(x - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}).$$

Dunque C ha autovalori distinti ed è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$. La matrice $\exp(Ct)$ è simile ad

$$\exp\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t}\left(\cos(\frac{2\pi}{3}t) + i\sin(\frac{2\pi}{3}t)\right) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t}\left(\cos(\frac{2\pi}{3}t) - i\sin(\frac{2\pi}{3}t)\right) \end{pmatrix}$$

dunque le funzioni $\left\{e^t, e^{-t}\cos(\frac{2\pi}{3}t), e^{-t}\sin(\frac{2\pi}{3}t)\right\}$ formano una base dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione $y''' - y = 0$.

Esempio 16 Consideriamo l'equazione $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. L'equazione caratteristica è allora $p_C(x) = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -(x-1)^3 = 0$. La matrice compagna, la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 e la forma di Jordan di C sono:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \qquad m_g(1) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1; \qquad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\exp(Ct)$ è pertanto simile ad

$$\exp(Jt) = \exp\begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 0 & t & t \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ è generato dai coefficenti di questa matrice: la soluzione generale dell'equazione è pertanto $\left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2\right)e^t$, dove c_0, c_1 e c_2 sono costanti.

6 Approssimazione: il metodo dei minimi quadrati

Un problema classico, in Ingegneria come in altre discipline, è quello di determinare una legge che descriva il comportamento di alcune variabili in funzione di altre a partire da un certo numero di osservazioni sperimentali. Supponiamo, ad esempio, di voler determinare il coefficente di dilatazione di un materiale in funzione della temperatura. Facciamo alcune misurazioni ed in corrispondenza dei valori $x_1, \ldots, x_n$ della temperatura e troviamo i valori $y_1, \ldots, y_n$ della dilatazione. Idealmente, vorremmo, a partire da questi dati, determinare una legge $y = f(x)$ che dia il valore y della dilatazione in funzione della temperatura x. Vorremmo cioè una funzione della temperatura che *interpoli* i valori trovati, cioè $y_i = f(x_i)$ per $i = 1, \ldots, n$.

La funzione interpolatrice potrebbe essere troppo complicata per essere utile. Nella pratica, spesso è sufficente conoscere una legge $y = f(x)$ che *approssimi* i valori trovati il meglio possibile. Vale a dire che cerchiamo una funzione semplice $f(x)$ della temperatura in modo tale che i valori $f(x_i)$ siano il più vicino possibile ai valori osservati y_i. Nella maggior parte dei casi, la funzione $f(x)$ adoperata è un polinomio, di grado fissato a priori (più alto è il grado, migliore è l'approssimazione, ma più lungo è il calcolo della f).

La condizione "i valori $f(x_i)$ sono il più vicino possibile ai valori osservati y_i" si può esprimere dicendo che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^n$ sono il più vicino possibile:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad f(X) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

o ancora che la norma $\|Y - f(X)\| = \sqrt{(y_1 - f(x_1))^2 + \cdots + (y_n - f(x_n))^2}$ è minima. Si badi che in questa espressione la variabile è f!

Riformuliamo il problema dal punto di vista geometrico: dati alcuni punti $P_1 = (x_1, y_1), \ldots, P_n = (x_n, y_n)$ nel piano euclideo, cerchiamo una curva $y = f(x)$ che abbia distanza minima dai punti assegnati.
Consideriamo dapprima il caso di una approssimazione lineare, cioè chiediamo che il polinomio $f(x) = ax + b$ sia di primo grado. Stiamo dunque cercando la retta che ha distanza minima da $P_1, \ldots, P_n$. Le variabili qui sono i coefficienti a e b dell'equazione della retta.
Nella notazione qui sopra, il vettore $f(X)$ è:

$$f(X) = \begin{pmatrix} b + ax_1 \\ \vdots \\ b + ax_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}).$$

Il problema è dunque di cercare $(b, a)^T \in \mathbb{R}^2$ in modo tale che la norma

$$\|Y - A\binom{b}{a}\| = \sqrt{(y_1 - ax_1 - b)^2 + \cdots + (y_n - ax_n - b)^2}$$

sia minima. Se interpretiamo A come la matrice di un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, stiamo quindi cercando un vettore $(b, a)^T \in \mathbb{R}^2$ la cui immagine sia più vicina possibile ad Y. La soluzione del problema è allora data dal teorema del vettore di norma minima: il vettore $Z \in \operatorname{Im} L$ tale che la norma $\|Y - Z\|$ sia minima è la proiezione ortogonale $Z = p_{\operatorname{Im} L}(Y)$ di Y su $\operatorname{Im} L$.

Proposizione 12 *I coefficienti della retta $y = ax + b$ che ha distanza minima da $P_1, \ldots P_n$ sono soluzioni del sistema lineare $A\binom{b}{a} = p_{\operatorname{Im} L}(Y)$.*

Osserviamo che il sistema è risolubile per costruzione: $p_{\operatorname{Im} L}(Y) \in \operatorname{Im} L$. Inoltre, se $n \geq 2$, cioè se abbiamo fatto almeno due misurazioni, $\operatorname{rg} A = 2$, dato che $x_1 \neq x_2$ e quindi le righe $(1, x_1)$ ed $(1, x_2)$ non sono proporzionali. Quindi $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva: $\ker A = \{\mathbf{0}\}$. Pertanto il sistema ammette un'unica soluzione.

Corollario 3 *La retta di minima distanza $y = ax + b$ esiste ed è unica.*

La ricerca della soluzione sembrerebbe a prima vista piuttosto laboriosa: dovremmo calcolare una base ortonormale per $\operatorname{Im} L$ (cioè per il sottospazio generato dalle colonne di A), proiettarvi sopra Y e poi risolvere il sistema.

Per fortuna possiamo cavarcela con molto meno. Osserviamo infatti che, se $A\binom{b}{a} = p_{\operatorname{Im} L}(Y)$, allora $Y - A\binom{b}{a} \in (\operatorname{Im} L)^\perp$. Quindi, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, il vettore $L(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ deve essere ortogonale ad $Y - A\binom{b}{a}$, cioè

$$0 = A\mathbf{v}\bullet\left(Y - A\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\right) = (A\mathbf{v})^T\left(Y - A\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\right) = \mathbf{v}^T A^T\left(Y - A\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\right) = \mathbf{v}\bullet\left(A^TY - A^TA\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\right).$$

Dato che $A \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$, la sua trasposta $A^T \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ è la matrice di un'applicazione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, dunque il vettore $A^TY - A^TA\binom{b}{a}$ è un vettore di $\mathbb{R}^2$. Il calcolo appena fatto ci dice che questo vettore è ortogonale a tutti i vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Ma solo il vettore nullo è ortogonale a tutti i vettori dello spazio. Concludiamo che $A^TY - A^TA\binom{b}{a}$ è il vettore nullo.

Proposizione 13 *I coefficienti della retta $y = ax + b$ che ha distanza minima da $P_1, \ldots P_n$ sono soluzioni del sistema lineare $A^TA\binom{b}{a} = A^TY$.*

Esempio 17 Determiniamo la retta di minima distanza tra i punti $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (2,0)$ e $P_3 = (3,2)$. Osserviamo che non sono allineati. Abbiamo allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I coefficienti della retta di minima distanza sono quindi soluzione del sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 3b + 6a = 3 \\ 6b + 14a = 7 \end{cases}.$$

L'unica soluzione del sistema è $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, quindi la retta cercata è $y = \frac{1}{2}x$. Osserviamo che nessuno dei tre punti appartiene alla retta.

Il caso dell'approssimazione polinomiale si tratta in maniera analoga: se cerchiamo un polinomio di grado d in modo tale che la curva $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$ abbia distanza minima dai punti $P_1 = (x_1, y_1)$, $\ldots$, $P_n = (x_n, y_n)$, determineremo i coefficienti $a_0, \ldots, a_d$ come soluzioni di un sistema lineare. La matrice da considerare è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,d+1}(\mathbb{R})$$

(detta matrice di Vandermonde). Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_dx_1^d \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_dx_n^d \end{pmatrix}.$$

Interpretando A come la matrice di un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^n$, l'immagine del vettore $(a_0, \ldots, a_d)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$ deve essere più vicina possibile ad $Y = (y_1, \ldots, y_n)^T$. Per il teorema del vettore di norma minima è quindi uguale alla proiezione ortogonale $p_{\operatorname{Im} L}(Y)$ di Y su $\operatorname{Im} L$.

Proposizione 14 *I coefficienti della curva $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$ che ha distanza minima da $P_1, \ldots P_n$ sono soluzioni del sistema lineare $A(a_0, \ldots, a_d)^T = p_{\operatorname{Im} L}(Y)$.*

Il sistema è risolubile perché $p_{\mathrm{Im}\, L}(Y) \in \mathrm{Im}\, L$. Anche in questo caso si può dimostrare che $\ker A = \{\mathbf{0}\}$ e dunque il sistema ammette un'unica soluzione. Lo stesso ragionamento che abbiamo fatto per $d = 1$ ci porta a concludere:

Proposizione 15 *I coefficienti della curva $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ che ha distanza minima da $P_1, \ldots P_n$ sono soluzioni del sistema lineare*

$$A^T A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Esempio 18 Determiniamo la parabola $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ di minima distanza tra i punti $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, 0)$ e $P_3 = (3, 2)$. Abbiamo allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I coefficienti della parabola di minima distanza sono quindi soluzione del sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 19 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a_0 + 6a_1 + 14a_2 = 3 \\ 6a_0 + 14a_1 + 36a_2 = 7 \\ 14a_0 + 36a_1 + 98a_2 = 19 \end{cases}$$

L'unica soluzione del sistema è $a_0 = 5$, $a_1 = -\frac{11}{2}$, $a_2 = \frac{3}{2}$, quindi la parabola cercata è

$$y = 5 - \frac{11}{2} x + \frac{3}{2} x^2.$$

Osserviamo che tutti e tre i punti appartengono alla parabola. In questo caso quindi, la parabola non solo approssima, ma interpola anche i valori assegnati.