

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

I^a prova di accertamento – Padova 4-11-06

TEMA n.1

Esercizio 1 Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y + \alpha z = 1 + \beta \\ 2x + (\alpha^2 + 2\alpha)z = 3 + \alpha \\ 3x + y + 5\alpha z = 7 + \beta. \end{cases}$$

- a) Determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema omogeneo associato ammette la soluzione $(\beta, 0, 0)$.
- b) Per quali, tra i valori trovati al punto precedente, il sistema è risolubile? Determinare per tali valori le soluzioni del sistema lineare.
- c) In particolare si determinino le soluzioni del sistema per $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^4$ si considerino $W = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (0, 1, 0, 0) \rangle$ e l'insieme U delle quaterne x, y, z, t tali che

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

- a) Si verifichi che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
- b) Si determini una base di $U \cap W$.
- c) Si determini la dimensione di $U + W$. La somma $U + W$ è diretta?
- d) Se possibile si esprima $(1, 1, 1, 1)$ in due modi diversi come somma di un vettore di U e di uno di W .

Esercizio 3 Si considerino le condizioni

$$f_a(1, 2, 4) = (1, 1, 0); \quad f_a(3, 2, 1) = (0, 2, 1); \quad f_a(-1, 1, 4) = (2, 0, a); \quad f_a(0, 3, 8) = (3, 1, -a^2).$$

- a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfa le condizioni date? L'applicazione è unica?
- b) Per tali valori, determinare nucleo ed immagine di f_a .
- c) Per i valori trovati, scrivere la matrice di f_a rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
- d) Sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $g(x, y) = (x, x + 2y, y)$. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $g \circ h = f_a$?

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

I^a prova di accertamento – Padova 4-11-06

TEMA n.2

Esercizio 1 Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + (1 - \alpha)z = 2 + \beta \\ 4x + 2y + (\alpha^2 - 4\alpha + 3)z = 4 - \alpha \\ 7x + 4y + (5 - 5\alpha)z = 6 + \beta. \end{cases}$$

- a) Determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema omogeneo associato ammette la soluzione $(\beta, 0, 0)$.
- b) Per quali, tra i valori trovati al punto precedente, il sistema è risolubile? Determinare per tali valori le soluzioni del sistema lineare.
- c) In particolare si determinino le soluzioni del sistema per $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^4$ si considerino $W = \langle (1, 1, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (1, 0, 0, 1) \rangle$ e l'insieme U delle quaterne x, y, z, t tali che

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

- a) Si verifichi che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
- b) Si determini una base di $U \cap W$.
- c) Si determini la dimensione di $U + W$. La somma $U + W$ è diretta?
- d) Se possibile si esprima $(1, 1, 1, 1)$ in due modi diversi come somma di un vettore di U e di uno di W .

Esercizio 3 Si considerino le condizioni

$$f_a(1, 3, -1) = (1, 1, 1); \quad f_a(2, 2, 1) = (0, 2, -1); \quad f_a(4, 1, 4) = (2, 4, a); \quad f_a(5, 4, 3) = (3, 5, a^2 + a).$$

- a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfa le condizioni date? L'applicazione è unica?
- b) Per tali valori, determinare nucleo ed immagine di f_a .
- c) Per i valori trovati, scrivere la matrice di f_a rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
- d) Sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $g(x, y) = (x, x + 2y, x - y)$. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $g \circ h = f_a$?

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

I^a prova di accertamento – Padova 4-11-06

TEMA n.3

Esercizio 1 Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - \alpha z = \beta - \alpha \\ 4x + 2y + (\alpha^2 - 2\alpha)z = \alpha^2 - 3\alpha - 1 \\ 7x + 4y - 5\alpha z = \beta - 5\alpha. \end{cases}$$

- a) Determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema omogeneo associato ammette la soluzione $(\beta, 0, 0)$.
- b) Per quali, tra i valori trovati al punto precedente, il sistema è risolubile? Determinare per tali valori le soluzioni del sistema lineare.
- c) In particolare si determinino le soluzioni del sistema per $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^4$ si considerino $W = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 0, 0, 1) \rangle$ e l'insieme U delle quaterne x, y, z, t tali che

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

- a) Si verifichi che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
- b) Si determini una base di $U \cap W$.
- c) Si determini la dimensione di $U + W$. La somma $U + W$ è diretta?
- d) Se possibile si esprima $(1, 1, 1, 1)$ in due modi diversi come somma di un vettore di U e di uno di W .

Esercizio 3 Si considerino le condizioni

$$f_a(1, 4, 2) = (1, 1, 0); \quad f_a(-1, 4, 1) = (0, 2, 1); \quad f_a(3, 1, 2) = (2, 0, -a); \quad f_a(4, 5, 4) = (3, 1, -a^2).$$

- a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfa le condizioni date? L'applicazione è unica?
- b) Per tali valori, determinare nucleo ed immagine di f_a .
- c) Per i valori trovati, scrivere la matrice di f_a rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
- d) Sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $g(x, y) = (x, x + 2y, y)$. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $g \circ h = f_a$?

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

I^a prova di accertamento – Padova 4-11-06

TEMA n.4

Esercizio 1 Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + (\alpha + 1)z = \beta + 1 \\ 2x + 4y + (\alpha^2 + 4\alpha + 3)z = \alpha \\ 3x + 7y + (5\alpha + 5)z = \beta - 1. \end{cases}$$

- Determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema omogeneo associato ammette la soluzione $(\beta, 0, 0)$.
- Per quali, tra i valori trovati al punto precedente, il sistema è risolubile? Determinare per tali valori le soluzioni del sistema lineare.
- In particolare si determinino le soluzioni del sistema per $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^4$ si considerino $W = \langle (1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 0), (0, 1, 2, 1) \rangle$ e l'insieme U delle quaterne x, y, z, t tali che

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

- Si verifichi che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
- Si determini una base di $U \cap W$.
- Si determini la dimensione di $U + W$. La somma $U + W$ è diretta?
- Se possibile si esprima $(1, 1, 1, 1)$ in due modi diversi come somma di un vettore di U e di uno di W .

Esercizio 3 Si considerino le condizioni

$$f_a(1, -1, 3) = (1, 1, 1); \quad f_a(4, 4, 1) = (0, 2, -1); \quad f_a(2, 1, 2) = (2, 6, a); \quad f_a(3, 0, 5) = (3, 7, a^2 + 1).$$

- Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfa le condizioni date? L'applicazione è unica?
- Per tali valori, determinare nucleo ed immagine di f_a .
- Per i valori trovati, scrivere la matrice di f_a rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
- Sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $g(x, y) = (x, x + 2y, x - y)$. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $g \circ h = f_a$?

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate