CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO

Padova 09-05-09

II prova parziale

TEMA n.1

Esercizio 1.

a) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme S_k delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + kx_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + (1+2k)x_3 + x_4 = k^2 - 1 \\ x_1 - x_2 + (k+2)x_3 + (k+1)x_4 = 2k^2 + 2k \end{cases}$$

calcolando la decomposizione LU della matrice associata.

b) Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni S_k precedentemente trovate è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto ad $\mathcal{E}$, base canonica di $\mathbb{R}^3$, nel dominio e nel codominio sia la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, l'insieme $B_k = \{(1, k, 1), (0, 1, k), (0, 0, 1)\}$ è base di $\mathbb{R}^3$? Per tali valori trovare la matrice del cambiamento di base dalla base B_k alla base canonica e la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base B_k.

2) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base B_k nel dominio e base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.

3) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel dominio e alla base B_k nel codominio.

4) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base B_k sia nel dominio che nel codominio.

5) Per ogni base $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ dimostrare che, detta C la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{C}$ sia nel dominio che nel codominio, $C^{10} = C$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici A_α dipendenti dal parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -1-2\alpha \\ \alpha+1 & 1-\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

i) Calcolare il polinomio caratteristico $p_\alpha(t)$.

ii) Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

iii) Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

iv) Nei casi in cui A_α non è diagonalizzabile, determinarne la forma di Jordan.

v) Nei casi in cui A_α non è diagonalizzabile, determinarne gli autovettori.

vi) Nei casi in cui A_α non è diagonalizzabile, determinare una matrice invertibile $H \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}A_\alpha H$ sia una matrice di Jordan.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO

Padova 09-05-09

II prova parziale

TEMA n.2

Esercizio 1.

a) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme S_α delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + (1+\alpha)x_3 + x_4 = \alpha^2 + \alpha - 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + (2\alpha+3)x_3 + x_4 = 2\alpha^2 + 3\alpha - 2 \\ x_1 - 2x_2 + (\alpha+3)x_3 + \alpha x_4 = \alpha^2 + 4\alpha + 4 \end{cases}$$

calcolando la decomposizione LU della matrice associata.

b) Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni S_α precedentemente trovate è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto ad $\mathcal{E}$, base canonica di $\mathbb{R}^3$, nel dominio e nel codominio sia la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, l'insieme $B_t = \{(1, t-1, 0), (0, 1, t-1), (0, 0, 1)\}$ è base di $\mathbb{R}^3$? Per tali valori trovare la matrice del cambiamento di base dalla base B_t alla base canonica e la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base B_t.

2) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base B_t nel dominio e base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.

3) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel dominio e alla base B_t nel codominio.

4) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base B_t sia nel dominio che nel codominio.

5) Per ogni base $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ dimostrare che, detta C la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{C}$ sia nel dominio che nel codominio, $C^{10} = C$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici A_β dipendenti dal parametro reale $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} -\beta-1 & -1 & -3-2\beta \\ \beta+2 & -\beta & \beta+1 \\ 0 & 1 & 2+\beta \end{pmatrix}$$

i) Calcolare il polinomio caratteristico $p_\beta(t)$.

ii) Determinare per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

iii) Determinare per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ la matrice A_β è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

iv) Nei casi in cui A_β non è diagonalizzabile, determinarne la forma di Jordan.

v) Nei casi in cui A_β non è diagonalizzabile, determinarne gli autovettori.

vi) Nei casi in cui A_β non è diagonalizzabile, determinare una matrice invertibile $H \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}A_\beta H$ sia una matrice di Jordan.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO

Padova 09-05-09
II prova parziale
TEMA n.3

Esercizio 1.

a) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme S_k delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - kx_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + (1-2k)x_3 + x_4 = k^2 - 1 \\ x_1 - x_2 + (2-k)x_3 + (1-k)x_4 = 2k^2 - 2k \end{cases}$$

calcolando la decomposizione LU della matrice associata.

b) Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni S_k precedentemente trovate è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto ad $\mathcal{E}$, base canonica di $\mathbb{R}^3$, nel dominio e nel codominio sia la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Per quali valori di $s \in \mathbb{R}$, l'insieme $B_s = \{(1, -s, 0), (0, 1, -s), (0, 0, 1)\}$ è base di $\mathbb{R}^3$? Per tali valori trovare la matrice del cambiamento di base dalla base B_s alla base canonica e la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base B_s.

2) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base B_s nel dominio e base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.

3) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel dominio e alla base B_s nel codominio.

4) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base B_s sia nel dominio che nel codominio.

5) Per ogni base $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ dimostrare che, detta C la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{C}$ sia nel dominio che nel codominio, $C^{10} = C$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici A_γ dipendenti dal parametro reale $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} \gamma - 1 & -1 & 2\gamma - 3 \\ 2 - \gamma & \gamma & 1 - \gamma \\ 0 & 1 & 2 - \gamma \end{pmatrix}$$

i) Calcolare il polinomio caratteristico $p_\gamma(t)$.

ii) Determinare per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

iii) Determinare per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice A_γ è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

iv) Nei casi in cui A_γ non è diagonalizzabile, determinarne la forma di Jordan.

v) Nei casi in cui A_γ non è diagonalizzabile, determinarne gli autovettori.

vi) Nei casi in cui A_γ non è diagonalizzabile, determinare una matrice invertibile $H \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}A_\gamma H$ sia una matrice di Jordan.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO

Padova 09-05-09

II prova parziale

TEMA n.4

Esercizio 1.

a) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme S_α delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + (1-\alpha)x_3 + x_4 = \alpha^2 - \alpha - 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + (3-2\alpha)x_3 + x_4 = 2\alpha^2 - 3\alpha - 2 \\ x_1 - 2x_2 + (3-\alpha)x_3 + \alpha x_4 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 \end{cases}$$

calcolando la decomposizione LU della matrice associata.

b) Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni S_α precedentemente trovate è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto ad $\mathcal{E}$, base canonica di $\mathbb{R}^3$, nel dominio e nel codominio sia la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, l'insieme $B_h = \{(1, h+1, 0), (0, 1, h+1), (0, 0, 1)\}$ è base di $\mathbb{R}^3$? Per tali valori trovare la matrice del cambiamento di base dalla base B_h alla base canonica e la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base B_h.

2) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base B_h nel dominio e base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.

3) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel dominio e alla base B_h nel codominio.

4) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base B_h sia nel dominio che nel codominio.

5) Per ogni base $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ dimostrare che, detta C la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{C}$ sia nel dominio che nel codominio, $C^{10} = C$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici A_δ dipendenti dal parametro reale $\delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1-\delta & -1 & 1-2\delta \\ \delta & 2-\delta & \delta-1 \\ 0 & 1 & \delta \end{pmatrix}$$

i) Calcolare il polinomio caratteristico $p_\delta(t)$.

ii) Determinare per quali valori del parametro $\delta \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

iii) Determinare per quali valori del parametro $\delta \in \mathbb{R}$ la matrice A_δ è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

iv) Nei casi in cui A_δ non è diagonalizzabile, determinarne la forma di Jordan.

v) Nei casi in cui A_δ non è diagonalizzabile, determinarne gli autovettori.

vi) Nei casi in cui A_δ non è diagonalizzabile, determinare una matrice invertibile $H \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}A_\delta H$ sia una matrice di Jordan.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.