CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO, CHIMICA-MATERIALI

Padova 10-02-06

I prova parziale

TEMA n.1

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale delle matrici $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

a) Mostrare che l'insieme T delle matrici

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

per cui si abbia (contemporaneamente) $x_1 = x_2$, $x_6 = 2x_1$, $x_3 - x_2 + x_5 = 0$, è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

b) Determinare una base di T e calcolarne la dimensione.

c) Dimostrare che

$$L = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rangle$$

è contenuto in T e determinare un sottospazio S di $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $S \oplus L = T$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, t, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -2x + 3z + t = 1 \\ 2x + 3y + (a^2 + 2a + 3)z + (a^2 - 2)t = a + 6 \\ y + 2(a^2 + 2a + 1)z + (3a^2 - 2a - 7)t = 3a + 4 \end{cases}$$

Risolvere il sistema per uno dei valori di a per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

la matrice di un endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Trovare $Ker g$ e $Im g$.

b) Determinare la controimmagine di $(2, 1, 3)$ mediante g.

c) Dato $L = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$, determinare un sottospazio M di $\mathbb{R}^3$ tale che $g(L) \oplus M = \mathbb{R}^3$.

d) Esiste un endomorfismo ψ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\psi(0, 1, 0) = (2, 1, 1)$, $\psi(1, 0, 0) = (0, 1, 2)$ e $Ker\psi = \langle (1, 0, 1) \rangle$? In caso affermativo, una volta fissate una base del dominio ed una base del codominio di ψ, si scriva la matrice associata a ψ rispetto ad esse.

(continua)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^5$ si considerino i due sottospazi:

$$V = \langle (1,3,5,2,1), (2,3,6,2,2), (1,4,4,3,6) \rangle,$$

$$W = \langle (1,0,1,0,1), (2,1,1,1,1), (0,1,-1,1,-1) \rangle.$$

a) Calcolare la dimensione di V e W.

b) Determinare $V \cap W$ e $V + W$.

c) Determinare un sottospazio S di $\mathbb{R}^5$ tale che $V + W = V \oplus S$.

d) Sia $m = (1,4,4,3,0)$. Verificare che m appartiene a $V + W$ e decomporre $m = m_V + m_S$, con $m_V \in V$ e $m_S \in S$.

Esercizio 5 (Facoltativo). Costruire, se possibile, una funzione (non lineare) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva ma non suriettiva. La funzione costruita soddisfa il teorema delle dimensioni?

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO, CHIMICA-MATERIALI

Padova 10-02-06

I prova parziale

TEMA n.2

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale delle matrici $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

a) Mostrare che l'insieme T delle matrici

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

per cui si abbia (contemporaneamente) $x_3 = x_4$, $x_6 = x_2$, $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 0$, è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

b) Determinare una base di T e calcolarne la dimensione.

c) Dimostrare che

$$L = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$$

è contenuto in T e determinare un sottospazio S di $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $S \oplus L = T$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, t, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -2x + 3z + t = 1 \\ 2x + 3y + (a^2 - 2a + 3)z + (a^2 - 2)t = a + 6 \\ y + 2(a^2 - 2a + 1)z + (3a^2 + 2a - 7)t = a^2 + 4a + 4 \end{cases}$$

Risolvere il sistema per uno dei valori di a per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 3. Sia

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice di un endomorfismo h di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Trovare $Ker h$ e $Im h$.

b) Determinare la controimmagine di $(4, -4, 4)$ mediante h.

c) Dato $L = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$, determinare un sottospazio vettoriale K di $\mathbb{R}^3$ tale che $h(L) \oplus K = \mathbb{R}^3$.

d) Esiste un endomorfismo φ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(1, 0, 0) = (0, 2, 1)$, $\varphi(0, 0, 1) = (1, -3, -2)$ e $Ker\varphi = \langle (1, -1, 0) \rangle$? In caso affermativo, una volta fissate una base del dominio ed una base del codominio di φ, si scriva la matrice associata a φ rispetto ad esse.

(continua)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^5$ si considerino i due sottospazi:

$$S = \langle (2,1,1,3,5), (1,2,6,1,2), (2,4,3,5,1) \rangle,$$

$$T = \langle (-1,1,5,-2,-3), (1,-1,2,1,1), (3,-3,-8,5,7) \rangle.$$

a) Calcolare la dimensione di S e T.

b) Determinare $S \cap T$ e $S + T$.

c) Determinare un sottospazio V di $\mathbb{R}^5$ tale che $S + T = S \oplus V$.

d) Sia $z = (3,0,3,4,6)$. Verificare che z appartiene a $S + T$ e decomporre $z = z_S + z_V$, con $z_S \in S$ e $z_V \in V$.

Esercizio 5 (Facoltativo). Costruire, se possibile, una funzione (non lineare) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva ma non suriettiva. La funzione costruita soddisfa il teorema delle dimensioni?

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO, CHIMICA-MATERIALI

Padova 10-02-06

I prova parziale

TEMA n.3

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale delle matrici $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$.

a) Mostrare che l'insieme T delle matrici

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

per cui si abbia (contemporaneamente) $x_2 = x_4$, $x_1 = x_3$, $x_1 + x_3 - x_5 - x_6 = 0$, è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$.

b) Determinare una base di T e calcolarne la dimensione.

c) Dimostrare che

$$L = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$$

è contenuto in T e determinare un sottospazio S di $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ tale che $S \oplus L = T$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, t, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + y - 3z + t = -1 \\ x + 5y + (a^2 + a + 5)z + (a^2 - 4)t = a + 7 \\ y - 2(a^2 + a - 1)z - (a^2 + a - 1)t = a^2 - a + 2 \end{cases}$$

Risolvere il sistema per uno dei valori di a per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 3. Sia

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Trovare $Kerf$ e Imf.

b) Determinare la controimmagine di $(-3, 7, 8)$ mediante f.

c) Dato $L = \langle (0, 1, 0), (0, 0, -1) \rangle$, determinare un sottospazio vettoriale T di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(L) \oplus T = \mathbb{R}^3$.

d) Esiste un endomorfismo h di $\mathbb{R}^3$ tale che $h(1, 0, 0) = (0, 1, 2)$, $h(0, 1, 1) = (2, -1, -1)$ e $Kerh = \langle (0, 0, 1) \rangle$? In caso affermativo, una volta fissate una base del dominio ed una base del codominio di h, si scriva la matrice associata ad h rispetto ad esse.

(continua)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^5$ si considerino i due sottospazi:

$$A = \langle (1, -1, 4, 1, 2), (1, 1, 0, -1, 0), (2, 3, 1, 1, 1) \rangle,$$

$$B = \langle (-1, -4, 3, 0, 1), (1, 0, -2, 2, -1), (1, -4, -1, 4, -1) \rangle.$$

a) Calcolare la dimensione di A e B.

b) Determinare $A \cap B$ e $A + B$.

c) Determinare un sottospazio S di $\mathbb{R}^5$ tale che $A + B = A \oplus S$.

d) Sia $w = (2, -1, 2, 3, 1)$. Verificare che w appartiene ad $A + B$ e decomporre $w = w_A + w_S$, con $w_A \in A$ e $w_S \in S$.

Esercizio 5 (Facoltativo). Costruire, se possibile, una funzione (non lineare) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva ma non suriettiva. La funzione costruita soddisfa il teorema delle dimensioni?

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO, CHIMICA-MATERIALI

Padova 10-02-06
I prova parziale
TEMA n.4

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale delle matrici $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

a) Mostrare che l'insieme T delle matrici

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

per cui si abbia (contemporaneamente) $x_1 - x_3 + x_6 = 0$, $x_5 = 2x_6$, $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$, è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

b) Determinare una base di T e calcolarne la dimensione.

c) Dimostrare che

$$L = \langle \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rangle$$

è contenuto in T e determinare un sottospazio S di $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $S \oplus L = T$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, t, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + y - 3z + t = -1 \\ x + 5y + (a^2 + a + 5)z + (a^2 - a - 3)t = a + 8 \\ y - 2(a^2 + a - 1)z - (a^2 - 2a + 2)t = a^2 - 2a - 1 \end{cases}$$

Risolvere il sistema per uno dei valori di a per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

la matrice di un endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Trovare $KerL$ e ImL.

b) Determinare la controimmagine di $(8, 9, 6)$ mediante L.

c) Dato $S = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$, determinare un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$ tale che $L(S) \oplus W = \mathbb{R}^3$.

d) Esiste un endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$ tale che $g(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$, $g(0, 0, -1) = (-5, -2, 3)$ e $Kerg = \langle (-1, 1, 1) \rangle$? In caso affermativo, una volta fissate una base del dominio ed una base del codominio di g, si scriva la matrice associata a g rispetto ad esse.

(continua)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^5$ si considerino i due sottospazi:

$$V = \langle (1,2,1,5,3), (1,-1,2,1,2), (2,4,3,5,1) \rangle,$$

$$W = \langle (0,-3,1,-4,-1), (1,2,1,3,1), (2,1,3,2,1) \rangle.$$

a) Calcolare la dimensione di V e W.

b) Determinare $V \cap W$ e $V + W$.

c) Determinare un sottospazio T di $\mathbb{R}^5$ tale che $V + W = V \oplus T$.

d) Sia $u = (2,4,2,8,4)$. Verificare che u appartiene a $V + W$ e decomporre $u = u_V + u_T$, con $u_V \in V$ e $u_T \in T$.

Esercizio 5 (Facoltativo). Costruire, se possibile, una funzione (non lineare) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva ma non suriettiva. La funzione costruita soddisfa il teorema delle dimensioni?

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.