Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 10-04-2010

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Siano v_1, v_2, v_3 vettori di uno spazio vettoriale V. Si ha: $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$.
2. $\mathbb{R}^2$ ha un numero finito di basi.
3. I sottospazi $S = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$ e $T = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ sono in somma diretta.

PARTE 2. Esercizi $\boxed{\textit{Tutte le riduzioni in forma a scala vanno calcolate con decomposizione LU}}$

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\leq 3}[X] = \{p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$ dei polinomi di grado minore od ugale a 3, si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] |\, p(0) = 0\}; \qquad W_k = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] |\, p(-1) = k\}.$$

a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che W_k sia un sottospazio di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$.

b) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere una base di $U \cap W_k$.

c) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), determinare $U + W_k$. Tale somma è diretta?

d) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere, se possibile, il polinomio $1 - X$ in due modi diversi come somma di un elemento di U e di uno di W_k.

e) Calcolare $\dim < W_k >$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_α:

$$S = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + < \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} >; \quad \Sigma_\alpha : \begin{cases} x - 2y + 3z - 3t = -1 \\ x + (2\alpha+1)z + t = 2\alpha + 3 \\ 3x - 2y + (3\alpha+4)z + (\alpha-1)t = 3\alpha + 3. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_α hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_α.

(*continua*)

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che:

$$f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}.$$

a) Verificare che esiste una ed una sola applicazione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

c) Determinare nucleo e immagine di f.

d) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia iniettiva.

e) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$h^{-1}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \rangle.$$

Una siffatta funzione è unica? Stabilire se $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} f$ e/o $\ker h \supset \ker f$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 10-04-2010

TEMA n.2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Siano v_1, v_2, v_3 vettori di uno spazio vettoriale V. Si ha: $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle 2v_1, 3v_2, 4v_3, v_1 - v_2\rangle$.
2. In $\mathbb{R}^3$ ci sono infinite terne di vettori linearmente indipendenti.
3. I sottospazi $S = \langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle$ e $T = \langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle$ di $\mathbb{R}^2$ sono in somma diretta.

PARTE 2. Esercizi *Tutte le riduzioni in forma a scala vanno calcolate con decomposizione LU*

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\leq 3}[X] = \{p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$ dei polinomi di grado minore od ugale a 3, si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] \,|\, p(1) = 0\}; \qquad W_k = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] \,|\, p(0) = k\}.$$

a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che W_k sia un sottospazio di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$.

b) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere una base di $U \cap W_k$.

c) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), determinare $U + W_k$. Tale somma è diretta?

d) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere, se possibile, il polinomio $1 + X$ in due modi diversi come somma di un elemento di U e di uno di W_k.

e) Calcolare $\dim < W_k >$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_α:

$$S = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + < \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} >; \quad \Sigma_\alpha : \begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = 1 \\ x + (2\alpha - 3)z - t = 2\alpha - 3 \\ 2x + 2y + (3\alpha - 1)z + (\alpha + 2)t = 3\alpha - 2. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_α hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_α.

(*continua*)

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che:

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}.$$

a) Verificare che esiste una ed una sola applicazione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

c) Determinare nucleo e immagine di f.

d) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia iniettiva.

e) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$h^{-1}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \rangle.$$

Una siffatta funzione è unica? Stabilire se $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} f$ e/o $\ker h \supset \ker f$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 10-04-2010

TEMA n.3

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Siano v_1, v_2 vettori di uno spazio vettoriale V. Si ha: $\langle v_1, v_2\rangle = \langle 2v_1, 3v_2, v_1 + v_2\rangle$.
2. $\mathbb{R}^3$ ha un numero finito di basi.
3. I sottospazi $S = \langle \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \rangle$ e $T = \langle \begin{pmatrix} 0\\1\\3\\4 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^4$ sono in somma diretta.

PARTE 2. Esercizi *Tutte le riduzioni in forma a scala vanno calcolate con decomposizione LU*

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\le 3}[X] = \{p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$ dei polinomi di grado minore od ugale a 3, si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\le 3}[X] |\, p(-1) = 0\}; \qquad W_k = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\le 3}[X] |\, p(0) = k\}.$$

a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che W_k sia un sottospazio di $\mathbb{R}^{\le 3}[X]$.

b) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere una base di $U \cap W_k$.

c) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), determinare $U + W_k$. Tale somma è diretta?

d) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere, se possibile, il polinomio $1 - X$ in due modi diversi come somma di un elemento di U e di uno di W_k.

e) Calcolare dim $< W_k >$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_α:

$$S = \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix} >; \quad \Sigma_\alpha : \begin{cases} x - z + t = 1 \\ x - 2y + (2\alpha + 5)z - 3t = 2\alpha + 1 \\ 2x + y + (2\alpha - 2)z + (\alpha + 4)t = 2\alpha + 4. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_α hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_α.

(*continua*)

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che:

$$f\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}.$$

a) Verificare che esiste una ed una sola applicazione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

c) Determinare nucleo e immagine di f.

d) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia iniettiva.

e) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$h^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \rangle.$$

Una siffatta funzione è unica? Stabilire se $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} f$ e/o $\ker h \supset \ker f$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 10-04-2010

TEMA n.4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Siano v_1, v_2 vettori di uno spazio vettoriale V. Si ha: $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle 2v_1, 3v_2, v_1 + v_2 \rangle$.
2. In $\mathbb{R}^2$ ci sono infinite coppie di vettori linearmente indipendenti.
3. I sottospazi $S = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ e $T = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ sono in somma diretta.

PARTE 2. Esercizi *Tutte le riduzioni in forma a scala vanno calcolate con decomposizione LU*

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\leq 3}[X] = \{p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$ dei polinomi di grado minore od ugale a 3, si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] |\, p(0) = 0\}; \qquad W_k = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] |\, p(1) = k\}.$$

a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che W_k sia un sottospazio di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$.

b) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere una base di $U \cap W_k$.

c) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), determinare $U + W_k$. Tale somma è diretta?

d) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere, se possibile, il polinomio $1 + X$ in due modi diversi come somma di un elemento di U e di uno di W_k.

e) Calcolare dim $< W_k >$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_α:

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} >; \quad \Sigma_\alpha : \begin{cases} x - z - t = -1 \\ x + 2y + (2\alpha + 1)z + 3t = 2\alpha - 1 \\ 3x + 4y + (3\alpha + 2)z + (\alpha + 5)t = 3\alpha - 1. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_α hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_α.

(*continua*)

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che:

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}.$$

a) Verificare che esiste una ed una sola applicazione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

c) Determinare nucleo e immagine di f.

d) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia iniettiva.

e) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$h^{-1}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle.$$

Una siffatta funzione è unica? Stabilire se $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} f$ e/o $\ker h \supset \ker f$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate