CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO

Padova 10-06-09

III prova parziale

TEMA n.1

Esercizio 1. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Si dica per quali (o per quale) $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è simmetrica.

b) Se $\bar{\alpha}$ è uno dei valori di α trovati in (a), si calcoli una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di $A_{\bar{\alpha}}$ ed una matrice H tale che $H^T A_{\bar{\alpha}} H$ sia diagonale.

c) Ortonormalizzare con Gram-Schmidt la seguente base di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B} = \{(-1,0,0,1), (-1,-1,1,1), (0,1,1,0), (1,1,1,1)\}.$$

d) Scrivere $(1,0,1,0)$ come somma di due autovettori di $A_{\bar{\alpha}}$. Tale scrittura è unica?

e) Trovare gli autovalori complessi della matrice a coefficienti complessi $A' = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & i \\ 0 & i & i & 0 \\ 0 & i & i & 0 \\ i & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$, dove $i^2 = -1$.

Esercizio 2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo le due rette:

$$r: \begin{cases} x = \ \ t \\ y = \ \ t+2 \\ z = 2t \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y+z-1=0 \end{cases}.$$

a) Determinare i punti di minima distanza $P \in r$ e $Q \in s$ delle due rette.

b) Le due rette sono sghembe?

c) Le tre rette r, s e la retta PQ sono ortogonali a due a due?

d) Dimostrare che esiste un unico piano che ha uguale distanza positiva da entrambe le rette r ed s e determinarlo.

e) Determinare le equazioni della retta s in un sistema di riferimento euclideo (X,Y,Z) in cui l'asse X è la retta r e l'asse Y è la retta PQ, orientata nel verso che va da P a Q.

f) Dimostrare che esiste un unica sfera di raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}$ tangente alle due rette r ed s. Determinare il centro di tale sfera.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO

Padova 10-06-09

III prova parziale

TEMA n.2

Esercizio 1. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Si dica per quali (o per quale) $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è simmetrica.

b) Se $\bar{\alpha}$ è uno dei valori di α trovati in (a), si calcoli una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di $A_{\bar{\alpha}}$ ed una matrice H tale che $H^T A_{\bar{\alpha}} H$ sia diagonale.

c) Ortonormalizzare con Gram-Schmidt la seguente base di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B} = \{(-1, 0, 0, 1), (-1, -1, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, 1)\}.$$

d) Scrivere $(1, 0, 1, 0)$ come somma di due autovettori di $A_{\bar{\alpha}}$. Tale scrittura è unica?

e) Trovare gli autovalori complessi della matrice a coefficienti complessi $A' = \begin{pmatrix} 0 & i & i & 0 \\ i & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix}$, dove $i^2 = -1$.

Esercizio 2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo le due rette:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 2 \\ z = t \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

a) Determinare i punti di minima distanza $P \in r$ e $Q \in s$ delle due rette.

b) Le due rette sono sghembe?

c) Le tre rette r, s e la retta PQ sono ortogonali a due a due?

d) Dimostrare che esiste un unico piano che ha uguale distanza positiva da entrambe le rette r ed s e determinarlo.

e) Determinare le equazioni della retta r in un sistema di riferimento euclideo (X, Y, Z) in cui l'asse X è la retta PQ, orientata nel verso che va da P a Q, e l'asse Y è la retta s.

f) Dimostrare che esiste un unica sfera di raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}$ tangente alle due rette r ed s. Determinare il centro di tale sfera.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO

Padova 10-06-09

III prova parziale

TEMA n.3

Esercizio 1. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Si dica per quali (o per quale) $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è simmetrica.

b) Se $\bar{\alpha}$ è uno dei valori di α trovati in (a), si calcoli una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di $A_{\bar{\alpha}}$ ed una matrice H tale che $H^T A_{\bar{\alpha}} H$ sia diagonale.

c) Ortonormalizzare con Gram-Schmidt la seguente base di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B} = \{(-1,0,0,1), (-1,-1,1,1), (0,1,1,0), (1,1,1,1)\}.$$

d) Scrivere $(1,0,1,0)$ come somma di due autovettori di $A_{\bar{\alpha}}$. Tale scrittura è unica?

e) Trovare gli autovalori complessi della matrice a coefficienti complessi $A' = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & -i & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ -i & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$, dove $i^2 = -1$.

Esercizio 2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo le due rette:

$$r : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} , \quad s : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

a) Determinare i punti di minima distanza $P \in r$ e $Q \in s$ delle due rette.

b) Le due rette sono sghembe?

c) Le tre rette r, s e la retta PQ sono ortogonali a due a due?

d) Dimostrare che esiste un unico piano che ha uguale distanza positiva da entrambe le rette r ed s e determinarlo.

e) Determinare le equazioni della retta s in un sistema di riferimento euclideo (X, Y, Z) in cui l'asse X è la retta PQ, orientata nel verso che va da P a Q, e l'asse Y è la retta r.

f) Dimostrare che esiste un unica sfera di raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}$ tangente alle due rette r ed s. Determinare il centro di tale sfera.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO

Padova 10-06-09

III prova parziale

TEMA n.4

Esercizio 1. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Si dica per quali (o per quale) $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è simmetrica.

b) Se $\bar{\alpha}$ è uno dei valori di α trovati in (a), si calcoli una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di $A_{\bar{\alpha}}$ ed una matrice H tale che $H^T A_{\bar{\alpha}} H$ sia diagonale.

c) Ortonormalizzare con Gram-Schmidt la seguente base di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B} = \{(-1,0,0,1), (-1,-1,1,1), (1,1,1,1), (1,-1,-1,1)\}.$$

d) Scrivere $(1,0,1,0)$ come somma di due autovettori di $A_{\bar{\alpha}}$. Tale scrittura è unica?

e) Trovare gli autovalori complessi della matrice a coefficienti complessi $A' = \begin{pmatrix} 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & i & 0 \end{pmatrix}$, dove $i^2 = -1$.

Esercizio 2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo le due rette:

$$r : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}, \quad s : \begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

a) Determinare i punti di minima distanza $P \in r$ e $Q \in s$ delle due rette.

b) Le due rette sono sghembe?

c) Le tre rette r, s e la retta PQ sono ortogonali a due a due?

d) Dimostrare che esiste un unico piano che ha uguale distanza positiva da entrambe le rette r ed s e determinarlo.

e) Determinare le equazioni della retta r in un sistema di riferimento euclideo (X, Y, Z) in cui l'asse X è la retta s e l'asse Y è la retta PQ, orientata nel verso che va da P a Q.

f) Dimostrare che esiste un unica sfera di raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}$ tangente alle due rette r ed s. Determinare il centro di tale sfera.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.