LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO

CORSO DI MATEMATICA 2

Padova 11-02-05

I prova parziale

TEMA n.1

Esercizio 1. Dato il sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\Sigma_{a,b} : \begin{cases} x + (2+a)y = b \\ (2+2a)x + 3y - (b+1)z = 1 + b \\ bx + by - (b+4)z = b^2 + 3b. \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il sistema omogeneo associato ammette la soluzione $(a, -a, 0)$.

b) Dire per quali tra i valori a, b trovati al punto precedente il sistema $\Sigma_{a,b}$ è risolubile e determinarne le soluzioni.

Esercizio 2. Sia $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) |\, A\binom{1}{1} = \binom{0}{0}\}$.

a) Dimostrare che S è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ e determinarne una base.

b) Sia $T = \langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \rangle$. Determinare una base per $S + T$. Tale somma è diretta?

c) Esiste un sottospazio $W \subseteq M_2(\mathbb{R})$ tale che $(S + T) \oplus W = M_2(\mathbb{R})$? In tal caso, determinarne uno.

Esercizio 3. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare f_α di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$f_\alpha(x, y, z) = (-x + (2 - \alpha)y + z, x - y + z, x - y + (4 - \alpha)z).$$

a) Scrivere la matrice associata a f_α rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare i valori di α per i quali f_α è iniettiva.

c) Determinare i valori di α per i quali il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

d) Posto $\alpha = 1$, determinare il nucleo dell'applicazione lineare f_1.

e) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f_0$.

f) Costruire, se possibile, una applicazione lineare suriettiva $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker h = \ker f_1$.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO

CORSO DI MATEMATICA 2

Padova 11-02-05

I prova parziale

TEMA n.2

Esercizio 1. Dato il sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\Sigma_{a,b} : \begin{cases} x + (a-1)y = b+1 \\ (a-2)x + 3y + (b-1)z = -1-b \\ bx + (2b^2 - b - 4)z = 3b^2. \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il sistema omogeneo associato ammette la soluzione $(a, -a, 0)$.

b) Dire per quali tra i valori a, b trovati al punto precedente il sistema $\Sigma_{a,b}$ è risolubile e determinarne le soluzioni.

Esercizio 2. Sia $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) |\, A\binom{1}{-1} = \binom{0}{0}\}$.

a) Dimostrare che S è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ e determinarne una base.

b) Sia $T = \langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \rangle$. Determinare una base per $S + T$. Tale somma è diretta?

c) Esiste un sottospazio $W \subseteq M_2(\mathbb{R})$ tale che $(S+T) \oplus W = M_2(\mathbb{R})$? In tal caso, determinarne uno.

Esercizio 3. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare f_α di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$f_\alpha(x, y, z) = (-x + y + (2-\alpha)z, x + y - z, x + (4-\alpha)y - z).$$

a) Scrivere la matrice associata a f_α rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare i valori di α per i quali f_α è iniettiva.

c) Determinare i valori di α per i quali il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

d) Posto $\alpha = 1$, determinare il nucleo dell'applicazione lineare f_1.

e) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f_0$.

f) Costruire, se possibile, una applicazione lineare suriettiva $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker h = \ker f_1$.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO

CORSO DI MATEMATICA 2

Padova 11-02-05

I prova parziale

TEMA n.3

Esercizio 1. Dato il sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\Sigma_{a,b}: \begin{cases} x + (1+a)y = b+1 \\ (2-a)x + y + bz = b+2 \\ bx + (2b^2 - b)z = b^2 + b - 1. \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il sistema omogeneo associato ammette la soluzione $(a, -a, 0)$.

b) Dire per quali tra i valori a, b trovati al punto precedente il sistema $\Sigma_{a,b}$ è risolubile e determinarne le soluzioni.

Esercizio 2. Sia $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) |\, A\binom{1}{2} = \binom{0}{0}\}$.

a) Dimostrare che S è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ e determinarne una base.

b) Sia $T = \langle \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rangle$. Determinare una base per $S + T$. Tale somma è diretta?

c) Esiste un sottospazio $W \subseteq M_2(\mathbb{R})$ tale che $(S + T) \oplus W = M_2(\mathbb{R})$? In tal caso, determinarne uno.

Esercizio 3. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare f_α di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$f_\alpha(x, y, z) = (-x + (1-\alpha)y + z, x - y + z, x - y + (3-\alpha)z).$$

a) Scrivere la matrice associata a f_α rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare i valori di α per i quali f_α è iniettiva.

c) Determinare i valori di α per i quali il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

d) Posto $\alpha = 2$, determinare il nucleo dell'applicazione lineare f_2.

e) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f_1$.

f) Costruire, se possibile, una applicazione lineare suriettiva $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker h = \ker f_2$.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO

CORSO DI MATEMATICA 2

Padova 11-02-05

I prova parziale

TEMA n.4

Esercizio 1. Dato il sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\Sigma_{a,b} : \begin{cases} x + (-2+a)y = b - 1 \\ (a-2)x + 5y - bz = 2 \\ bx - by + bz = 4b^2 - b - 1. \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il sistema omogeneo associato ammette la soluzione $(a, -a, 0)$.

b) Dire per quali tra i valori a, b trovati al punto precedente il sistema $\Sigma_{a,b}$ è risolubile e determinarne le soluzioni.

Esercizio 2. Sia $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) |\, A\binom{2}{1} = \binom{0}{0}\}$.

a) Dimostrare che S è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ e determinarne una base.

b) Sia $T = \langle \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$. Determinare una base per $S + T$. Tale somma è diretta?

c) Esiste un sottospazio $W \subseteq M_2(\mathbb{R})$ tale che $(S+T) \oplus W = M_2(\mathbb{R})$? In tal caso, determinarne uno.

Esercizio 3. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare f_α di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$f_\alpha(x, y, z) = (-x + y + (1-\alpha)z, x + y - z, x + (3-\alpha)y - z).$$

a) Scrivere la matrice associata a f_α rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare i valori di α per i quali f_α è iniettiva.

c) Determinare i valori di α per i quali il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

d) Posto $\alpha = 0$, determinare il nucleo dell'applicazione lineare f_0.

e) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f_5$.

f) Costruire, se possibile, una applicazione lineare suriettiva $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker h = \ker f_0$.