LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

II^a prova di accertamento – Padova 11-12-2006

TEMA n.1

Esercizio 1 Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 + x_2 - x_3 - x_4, -2x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_4, -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4)$$

a) Determinare autovalori e autovettori di T.

b) Dire se la matrice A, associata a T rispetto alla base canonica, è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare la matrice H tale che $H^{-1}AH$ è una matrice diagonale.

c) Se possibile, determinare una base ortonormale di autovettori di T.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $W = \langle(-1, 0, 0, 1), (3, 1, 1, -3)\rangle$.

a) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 2, 0, 1)$ su W.

b) Determinare i vettori $\mathbf{v} \in (1, 2, 0, 1) + < (-1, 0, 0, 1) >$ tali che $\|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{2}$.

c) Esistono vettori $\mathbf{u} \in (1, 2, 0, 1) + W$ tali che $\|\mathbf{u}\| \lneq \|\mathbf{v}\|$?

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 4y - z = 6 \end{cases} \qquad s_\alpha : \begin{cases} 2x + z = 2\alpha + 12 \\ 2y - \alpha z = 2 \end{cases} .$$

a) Determinare la distanza tra la retta r e il punto $P = (0, 1, 1)$.

b) Determinare la posizione relativa delle due rette r e s_α al variare del parametro reale α.

c) Per $\alpha = 0$, determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette r e s_0.

d) Determinare i valori $\bar{\alpha}$ del parametro per cui r e $s_{\bar{\alpha}}$ sono perpendicolari.

e) Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r e l'asse Y è la retta $s_{\bar{\alpha}}$, con $\bar{\alpha}$ uno dei valori determinati al punto d). Scrivere le equazioni dell'asse Z nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$.

Esercizio 4 Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$z^4 - i\sqrt{3}z^2 - 1 = 0.$$

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

II^a prova di accertamento – Padova 11-12-2006

TEMA n.2

Esercizio 1 Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 + x_2 - x_3 - x_4, -2x_2 + 2x_3, -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4, 2x_1 + 2x_4)$$

a) Determinare autovalori e autovettori di T.

b) Dire se la matrice A, associata a T rispetto alla base canonica, è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare la matrice H tale che $H^{-1}AH$ è una matrice diagonale.

c) Se possibile, determinare una base ortonormale di autovettori di T.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $W = \langle (1, 1, -1, 1), (1, 2, 0, 1) \rangle$.

a) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 1, 1, -1)$ su W.

b) Determinare i vettori $\mathbf{v} \in (1, 1, 1, -1)+ < (1, 1, -1, 1) >$ tali che $\|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{2}$.

c) Esistono vettori $\mathbf{u} \in (1, 1, 1, -1) + W$ tali che $\|\mathbf{u}\| \lneqq \|\mathbf{v}\|$?

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x + 4y + z = 6 \end{cases} \qquad s_\alpha : \begin{cases} 2x - z = 2\alpha - 8 \\ 2y - \alpha z = 2 \end{cases} .$$

a) Determinare la distanza tra la retta r e il punto $P = (1, 0, 1)$.

b) Determinare la posizione relativa delle due rette r e s_α al variare del parametro reale α.

c) Per $\alpha = 0$, determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette r e s_0.

d) Determinare i valori $\bar{\alpha}$ del parametro per cui r e $s_{\bar{\alpha}}$ sono perpendicolari.

e) Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r e l'asse Y è la retta $s_{\bar{\alpha}}$, con $\bar{\alpha}$ uno dei valori determinati al punto d). Scrivere le equazioni dell'asse Z nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$.

Esercizio 4 Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

II^a prova di accertamento – Padova 11-12-2006

TEMA n.3

Esercizio 1 Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, 2x_2 - 2x_3, -2x_1 - 2x_4, 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4)$$

a) Determinare autovalori e autovettori di T.

b) Dire se la matrice A, associata a T rispetto alla base canonica, è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare la matrice H tale che $H^{-1}AH$ è una matrice diagonale.

c) Se possibile, determinare una base ortonormale di autovettori di T.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $W = \langle (1, 0, 1, 1), (2, 0, 0, 1) \rangle$.

a) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $(0, 2, 0, -3)$ su W.

b) Determinare i vettori $\mathbf{v} \in (0, 2, 0, -3) + < (1, 0, 1, 1) >$ tali che $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{22}$.

c) Esistono vettori $\mathbf{u} \in (0, 2, 0, -3) + W$ tali che $\|\mathbf{u}\| \lneqq \|\mathbf{v}\|$?

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 4x + 2y - z = 6 \end{cases} \qquad s_\alpha : \begin{cases} 2y + z = 2\alpha + 12 \\ 2x - \alpha z = 2 \end{cases} .$$

a) Determinare la distanza tra la retta r e il punto $P = (0, 1, 1)$.

b) Determinare la posizione relativa delle due rette r e s_α al variare del parametro reale α.

c) Per $\alpha = 0$, determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette r e s_0.

d) Determinare i valori $\bar{\alpha}$ del parametro per cui r e $s_{\bar{\alpha}}$ sono perpendicolari.

e) Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r e l'asse Y è la retta $s_{\bar{\alpha}}$, con $\bar{\alpha}$ uno dei valori determinati al punto d). Scrivere le equazioni dell'asse Z nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$.

Esercizio 4 Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$z^4 + i\sqrt{3}z^2 - 1 = 0.$$

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

II^a prova di accertamento – Padova 11-12-2006

TEMA n.4

Esercizio 1 Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, 2x_2 - 2x_3, 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4, -2x_1 - 2x_4)$$

a) Determinare autovalori e autovettori di T.

b) Dire se la matrice A, associata a T rispetto alla base canonica, è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare la matrice H tale che $H^{-1}AH$ è una matrice diagonale.

c) Se possibile, determinare una base ortonormale di autovettori di T.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $W = \langle(1, 0, 1, 0), (0, 1, -2, 1)\rangle$.

a) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $(2, 1, 0, -3)$ su W.

b) Determinare i vettori $\mathbf{v} \in (2, 1, 0, -3) + < (1, 0, 1, 0) >$ tali che $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{20}$.

c) Esistono vettori $\mathbf{u} \in (2, 1, 0, -3) + W$ tali che $\|\mathbf{u}\| \lneqq \|\mathbf{v}\|$?

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x + 4y + 4z = 6 \end{cases} \qquad s_\alpha : \begin{cases} 2x - y = -\alpha - 1 \\ \alpha y + 2z = \alpha \end{cases} .$$

a) Determinare la distanza tra la retta r e il punto $P = (0, 1, 1)$.

b) Determinare la posizione relativa delle due rette r e s_α al variare del parametro reale α.

c) Per $\alpha = 0$, determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette r e s_0.

d) Determinare i valori $\bar{\alpha}$ del parametro per cui r e $s_{\bar{\alpha}}$ sono perpendicolari.

e) Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r e l'asse Y è la retta $s_{\bar{\alpha}}$, con $\bar{\alpha}$ uno dei valori determinati al punto d). Scrivere le equazioni dell'asse Z nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$.

Esercizio 4 Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$z^4 - z^2 + 1 = 0.$$

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate