**CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE-TERRITORIO**

Padova 15-06-2010

II prova parziale

TEMA n.1

**Esercizio 1.** Si consideri la seguente matrice $A_\alpha$, dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

a) Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A_\alpha$ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

b) Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A_\alpha$ è ortogonalmente diagonalizzabile?

c) Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice $A_\alpha$ sia simile ad una matrice ortogonale?

d) Scelto a piacere un valore di $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ tale che la matrice abbia un unico autovalore, determinare la forma di Jordan $J$ di $A_{\bar{\alpha}}$ ed una matrice $H$ tale che $H^{-1}A_{\bar{\alpha}}H = J$.

e) Posto $\alpha = i \in \mathbb{C}$, deteminare gli autospazi in $\mathbb{C}^4$ della matrice $A_i$.

**Esercizio 2.** Si considerino i sottospazi $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

a) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $U^\perp \cap W^\perp$ sul sottospazio $(U+W)^\perp$;

b) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_U(v) = p_W(v)$.

**Esercizio 3.** Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$ si considerino il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta $r$ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente la retta $r$ e parallelo al vettore $v$.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta $t$ contenuta nel piano $\pi$, ortogonale ad $r$ e passante per il punto $P$.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette $s_1, s_2$, sul piano $\pi$, bisettrici degli angoli formati dalle rette $r$ e $t$.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette $s_1, s_2$ in un sistema di riferimento euclideo $(X, Y, Z)$ in cui l'asse $X$ sia la retta $r$ e l'asse $Y$ sia la retta $t$.

**Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate**

**CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE-TERRITORIO**

Padova 15-06-2010

II prova parziale

TEMA n.2

**Esercizio 1.** Si consideri la seguente matrice $B_h$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$B_h = \begin{pmatrix} h^2 & 0 & 0 & -h+1 \\ 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & -h+1 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ la matrice $B_h$ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

b) Per quali valori del parametro $B_h$ la matrice $B_h$ è ortogonalmente diagonalizzabile?

c) Esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che la matrice $B_h$ sia simile ad una matrice ortogonale?

d) Scelto a piacere un valore di $\bar{h} \in \mathbb{R}$ tale che la matrice abbia un unico autovalore, determinare la forma di Jordan $J$ di $B_{\bar{h}}$ ed una matrice $H$ tale che $H^{-1}B_{\bar{h}}H = J$.

e) Posto $h = i \in \mathbb{C}$, deteminare gli autospazi in $\mathbb{C}^4$ della matrice $B_i$.

**Esercizio 2.** Si considerino i sottospazi $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e $U_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

a) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $U_1^\perp \cap U_2^\perp$ sul sottospazio $(U_1 + U_2)^\perp$;

b) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_{U_1}(v) = p_{U_2}(v)$.

**Esercizio 3.** Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$ si considerino il vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e

la retta $r$ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente la retta $r$ e parallelo al vettore $v$.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta $t$ contenuta nel piano $\pi$, ortogonale ad $r$ e passante per il punto $P$.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette $s_1, s_2$, sul piano $\pi$, bisettrici degli angoli formati dalle rette $r$ e $t$.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette $s_1, s_2$ in un sistema di riferimento euclideo $(X, Y, Z)$ in cui l'asse $Y$ sia la retta $r$ e l'asse $Z$ sia la retta $t$.

**Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate**

**CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE-TERRITORIO**

Padova 15-06-2010

II prova parziale

TEMA n.3

**Esercizio 1.** Si consideri la matrice $H_\gamma$ dipendente dal parametro $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$H_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 & 0 & \gamma+1 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma+1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice $H_\gamma$ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

b) Per quali valori del parametro $\gamma$ la matrice $H_\gamma$ è ortogonalmente diagonalizzabile?

c) Esistono valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che la matrice $H_\gamma$ sia simile ad una matrice ortogonale?

d) Scelto a piacere un valore $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}$ tale che la matrice abbia un unico autovalore, determinare la forma di Jordan $J$ di $H_{\bar{\gamma}}$ ed una matrice $K$ tale che $K^{-1}H_{\bar{\gamma}}K = J$.

e) Posto $\gamma = i \in \mathbb{C}$, deteminare gli autospazi in $\mathbb{C}^4$ della matrice $H_i$.

**Esercizio 2.** Si considerino i sottospazi $V_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ e $V_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

a) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $(V_1 + V_2)^\perp$ sul sottospazio $V_1^\perp \cap V_2^\perp$;

b) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_{V_1}(v) = p_{V_2}(v)$.

**Esercizio 3.** Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$ si considerino il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e la retta $r$ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente la retta $r$ e parallelo al vettore $v$.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta $t$ contenuta nel piano $\pi$, ortogonale ad $r$ e passante per il punto $P$.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette $s_1, s_2$, sul piano $\pi$, bisettrici degli angoli formati dalle rette $r$ e $t$.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette $s_1, s_2$ in un sistema di riferimento euclideo $(X, Y, Z)$ in cui l'asse $X$ sia la retta $r$ e l'asse $Z$ sia la retta $t$.

**Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate**

**CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE-TERRITORIO**

Padova 15-06-2010

II prova parziale

TEMA n.4

**Esercizio 1.** Si consideri la matrice $M_k$ dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$M_k = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & -k+1 \\ 0 & k^2 & 0 & 0 \\ 0 & -k+1 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}.$$

a) Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice $M_k$ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

b) Per quali valori del parametro $k$ la matrice $M_k$ è ortogonalmente diagonalizzabile?

c) Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice $M_k$ sia simile ad una matrice ortogonale?

d) Scelto a piacere un valore $\bar{k} \in \mathbb{R}$ tale che la matrice abbia un unico autovalore, determinare la forma di Jordan $J$ di $M_{\bar{k}}$ ed una matrice $H$ tale che $H^{-1}M_{\bar{k}}H = J$.

e) Posto $k = i \in \mathbb{C}$, deteminare gli autospazi in $\mathbb{C}^4$ della matrice $M_i$.

**Esercizio 2.** Si considerino i sottospazi $S = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ e $T = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

a) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $(S+T)^\perp$ sul sottospazio $S^\perp \cap T^\perp$;

b) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_S(v) = p_T(v)$.

**Esercizio 3.** Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$ si considerino il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta $r$ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1-\lambda \\ z = 3+\lambda. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente la retta $r$ e parallelo al vettore $v$.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta $t$ contenuta nel piano $\pi$, ortogonale ad $r$ e passante per il punto $P$.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette $s_1, s_2$, sul piano $\pi$, bisettrici degli angoli formati dalle rette $r$ e $t$.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette $s_1, s_2$ in un sistema di riferimento euclideo $(X, Y, Z)$ in cui l'asse $Z$ sia la retta $r$ e l'asse $Y$ sia la retta $t$.

**Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate**