LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 18-03-05
II prova parziale
TEMA n.1

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio vettoriale L dato dalle soluzioni dell'equazione $3x + y + 2z = 0$.

a) Si determini $L^\perp$.

b) Si determini una base ortonormale di L.

c) Si trovi la proiezione ortogonale $s_{//}$ del vettore $s = (1, 1, 1)$ su L.

d) Si decomponga il vettore s nella somma di un vettore di L e di un vettore di $L^\perp$.

e) Si determini un sottospazio vettoriale P di $\mathbb{R}^3$, diverso da $L^\perp$, tale che $L \oplus P = \mathbb{R}^3$, e si descriva $s = (1, 1, 1)$ come somma di un vettore s_1 di L e di un vettore s_2 di P.

Esercizio 2. Si consideri, al variare di α nell'insieme dei numeri reali, l'insieme di matrici

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \\ \alpha & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Mostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il polinomio caratteristico $p_{A_\alpha}(\lambda)$ di A_α è sempre lo stesso.

b) Stabilire per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile. Per i valori trovati si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi la matrice A_α.

c) Determinare, se possibile, i valori del parametro α per cui la matrice A_α è ortogonalmente diagonalizzabile.

d) Determinare, se possibile, un valore del parametro α per cui l'immagine mediante A_α del vettore $(1, 0, -1)$ sia ortogonale al vettore $(1, 0, -1)$.

e) Posto $\alpha = 2$ determinare una matrice B non diagonale simile alla matrice A_2 e diversa da questa.

f) Esistono degli autovettori comuni a tutte le matrici A_α? In caso affermativo determinarli tutti.

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni, rispettivamente:

$$r_1 : \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} y - 2 = 0 \\ x - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

a) Scelte due rette qualsiasi tra r_1, r_2, r_3 si mostri che sono sghembe.

b) Determinare la distanza tra le due rette scelte al punto a).

c) Si dica se esiste una retta sul piano $z = 5$ che intersechi tutte le tre rette r_1, r_2, r_3 (suggerimento: gli eventuali punti di intersezione di tale retta con le rette r_1, r_2, r_3 debbono stare sul piano $z = 5$).

d) Stabilire se esistono rette parallele al piano $z = 5$ che intersecano contemporaneamente le tre rette r_1, r_2, r_3.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 18-03-05
II prova parziale
TEMA n.2

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio vettoriale L dato dalle soluzioni dell'equazione $2x + y + 3z = 0$.

a) Si determini $L^\perp$.

b) Si determini una base ortonormale di L.

c) Si trovi la proiezione ortogonale $s_{//}$ del vettore $s = (1, -1, 1)$ su L.

d) Si decomponga il vettore s nella somma di un vettore di L e di un vettore di $L^\perp$.

e) Si determini un sottospazio vettoriale P di $\mathbb{R}^3$, diverso da $L^\perp$, tale che $L \oplus P = \mathbb{R}^3$, e si descriva $s = (1, -1, 1)$ come somma di un vettore s_1 di L e di un vettore s_2 di P.

Esercizio 2. Si consideri, al variare di α nell'insieme dei numeri reali, l'insieme di matrici

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Mostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il polinomio caratteristico $p_{A_\alpha}(\lambda)$ di A_α è sempre lo stesso.

b) Stabilire per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile. Per i valori trovati si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi la matrice A_α.

c) Determinare, se possibile, i valori del parametro α per cui la matrice A_α è ortogonalmente diagonalizzabile.

d) Determinare, se possibile, un valore del parametro α per cui l'immagine mediante A_α del vettore $(1, 1, 1)$ sia ortogonale al vettore $(1, 1, 1)$.

e) Posto $\alpha = -1$ determinare una matrice B non diagonale simile alla matrice A_{-1} e diversa da questa.

f) Esistono degli autovettori comuni a tutte le matrici A_α? In caso affermativo determinarli tutti.

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni, rispettivamente:

$$r_1 : \begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} y + 2 = 0 \\ x - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Scelte due rette qualsiasi tra r_1, r_2, r_3 si mostri che sono sghembe.

b) Determinare la distanza tra le due rette scelte al punto a).

c) Si dica se esiste una retta sul piano $z = 5$ che intersechi tutte le tre rette r_1, r_2, r_3 (suggerimento: gli eventuali punti di intersezione di tale retta con le rette r_1, r_2, r_3 debbono stare sul piano $z = 5$).

d) Stabilire se esistono rette parallele al piano $z = 5$ che intersecano contemporaneamente le tre rette r_1, r_2, r_3.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 18-03-05
II prova parziale
TEMA n.3

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio vettoriale L dato dalle soluzioni dell'equazione $x + 3y + 2z = 0$.

a) Si determini $L^{\perp}$.

b) Si determini una base ortonormale di L.

c) Si trovi la proiezione ortogonale $s_{//}$ del vettore $s = (-1, 1, 1)$ su L.

d) Si decomponga il vettore s nella somma di un vettore di L e di un vettore di $L^{\perp}$.

e) Si determini un sottospazio vettoriale P di $\mathbb{R}^3$, diverso da $L^{\perp}$, tale che $L \oplus P = \mathbb{R}^3$, e si descriva $s = (-1, 1, 1)$ come somma di un vettore s_1 di L e di un vettore s_2 di P.

Esercizio 2. Si consideri, al variare di α nell'insieme dei numeri reali, l'insieme di matrici

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 6 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Mostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il polinomio caratteristico $p_{A_\alpha}(\lambda)$ di A_α è sempre lo stesso.

b) Stabilire per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile. Per i valori trovati si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi la matrice A_α.

c) Determinare, se possibile, i valori del parametro α per cui la matrice A_α è ortogonalmente diagonalizzabile.

d) Determinare, se possibile, un valore del parametro α per cui l'immagine mediante A_α del vettore $(1, 1, -1)$ sia ortogonale al vettore $(1, 0, -1)$.

e) Posto $\alpha = 4/5$ determinare una matrice B non diagonale simile alla matrice $A_{4/5}$ e diversa da questa.

f) Esistono degli autovettori comuni a tutte le matrici A_α? In caso affermativo determinarli tutti.

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni, rispettivamente:

$$r_1 : \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x + 2z + 2 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} y - 2 = 0 \\ x - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

a) Scelte due rette qualsiasi tra r_1, r_2, r_3 si mostri che sono sghembe.

b) Determinare la distanza tra le due rette scelte al punto a).

c) Si dica se esiste una retta sul piano $z = 5$ che intersechi tutte le tre rette r_1, r_2, r_3 (suggerimento: gli eventuali punti di intersezione di tale retta con le rette r_1, r_2, r_3 debbono stare sul piano $z = 5$).

d) Stabilire se esistono rette parallele al piano $z = 5$ che intersecano contemporaneamente le tre rette r_1, r_2, r_3.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 18-03-05
II prova parziale
TEMA n.4

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio vettoriale L dato dalle soluzioni dell'equazione $3x + 2y + z = 0$.

a) Si determini $L^\perp$.

b) Si determini una base ortonormale di L.

c) Si trovi la proiezione ortogonale $s_{//}$ del vettore $s = (2, -1, -1)$ su L.

d) Si decomponga il vettore s nella somma di un vettore di L e di un vettore di $L^\perp$.

e) Si determini un sottospazio vettoriale P di $\mathbb{R}^3$, diverso da $L^\perp$, tale che $L \oplus P = \mathbb{R}^3$, e si descriva $s = (2, -1, -1)$ come somma di un vettore s_1 di L e di un vettore s_2 di P.

Esercizio 2. Si consideri, al variare di α nell'insieme dei numeri reali, l'insieme di matrici

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Mostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il polinomio caratteristico $p_{A_\alpha}(\lambda)$ di A_α è sempre lo stesso.

b) Stabilire per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile. Per i valori trovati si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi la matrice A_α.

c) Determinare, se possibile, i valori del parametro α per cui la matrice A_α è ortogonalmente diagonalizzabile.

d) Determinare, se possibile, un valore del parametro α per cui l'immagine mediante A_α del vettore $(1, 2, -1)$ sia ortogonale al vettore $(1, 2, -1)$.

e) Posto $\alpha = -1$ determinare una matrice B non diagonale simile alla matrice A_{-1} e diversa da questa.

f) Esistono degli autovettori comuni a tutte le matrici A_α? In caso affermativo determinarli tutti.

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni, rispettivamente:

$$r_1 : \begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} y + 2 = 0 \\ x - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

a) Scelte due rette qualsiasi tra r_1, r_2, r_3 si mostri che sono sghembe.

b) Determinare la distanza tra le due rette scelte al punto a).

c) Si dica se esiste una retta sul piano $z = 5$ che intersechi tutte le tre rette r_1, r_2, r_3 (suggerimento: gli eventuali punti di intersezione di tale retta con le rette r_1, r_2, r_3 debbono stare sul piano $z = 5$).

d) Stabilire se esistono rette parallele al piano $z = 5$ che intersecano contemporaneamente le tre rette r_1, r_2, r_3.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.