LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA o AEROSPAZIALE

Corso di Matematica 2

PADOVA 19-11-2002

2^0 Compitino

TEMA n.1

1. Sia $A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & p \\ 0 & 1 & 2p \end{pmatrix}$, $p \in \mathbf{R}$.

   a) Si dica per quale valore di p la matrice A_p ammette $(0, 1, 1)$ come autovettore.

   b) Detta A la matrice che soddisfa la condizione a), si determini, se esiste, una matrice ortogonale Q che diagonalizza A.

   c) Indicato con f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ avente A come matrice associata rispetto alla base canonica, si dica se esiste un base β di $\mathbf{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Nello spazio tridimensionale euclideo siano date le rette

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = -2t \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 3t' - 1 \\ y = t' \\ z = -t' + 1 \end{cases} .$$

   a) Studiare la posizione reciproca di r e s.

   b) Calcolare la distanza fra r e s.

   c) Calcolare la retta che passa per $A(1, 1, 1)$ ed è ortogonale sia a r che a s.

   d) Si dica se esiste un piano che contiene r ed è ortogonale a s. In caso affermativo se ne scriva l'equazione.

3. Si dica perché la terna $B = ((1, 1 - 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

   - Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base B.
   - Si calcolino le coordinate di $(1, 2, 3)$ rispetto alla base B.

Dopo aver risposto alle domande precedenti:

- Si determini la rappresentazione in forma trigonometrica del numero complesso

$$\frac{(i-1)^3}{i+\sqrt{3}}.$$

- Sia A la matrice che ha

$$U = < (1,0,1,0),(0,1,1,1) >, \quad V = < (0,1,0,-1),(0,0,-1,1) >$$

  come autospazi relativi agli autovalori 1 e 2 rispettivamente. Stabilire:

  1. se A è diagonalizzabile;
  2. il rango di A;
  3. se A è simmetrica.

Parte Integrativa
In $\mathbf{R}^3$ si considerino gli endomorfismi L_t definiti da:

$$L_t(x,y,z) = (x - ty + tz,\ ty,\ 2y - z), \quad t \in \mathbf{R}.$$

1. Si dica per quali valori di t L_t è iniettiva e per quali $(2,2,2) \in \mathrm{Im}(L_t)$.
2. Determinare al variare di t la controimmagine, mediante L_t, del vettore $(t,0,0)$.
3. Determinare per ogni $t \in \mathbf{R}$ un sottospazio S_t tale che $ker(L_t) \oplus S_t = \mathbf{R}^3$.