

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA e AEROSPAZIALE

CORSO DI MATEMATICA 2

Padova 19-11-03

II prova parziale

TEMA n.1

Esercizio 1. Si consideri, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & -2a & 4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Stabilire per quali valori di a la matrice A_a è diagonalizzabile.
- (ii) Posto $a = 0$ si determini una base ortonormale di autovettori di A_0 .
- (iii) Le matrici A_0 e A_1 sono simili?

Esercizio 2. Nello spazio euclideo di dimensione 3:

- (i) Determinare la retta s passante per $O = (0, 0, 0)$ e ortogonale al piano π di equazione $x + y + z = 2$ ed il piano σ passante per il punto $D = (-1, 0, 2)$ e ortogonale al vettore $v = (-2, 0, 1)$;
- (ii) detta r la retta passante per il punto $P = (1, 1, -2)$ e parallela al vettore v , si studi la posizione reciproca delle rette r ed s e si calcoli la loro distanza;
- (iii) sia τ il piano di equazione cartesiana $x = 1$. Determinare, se possibile, una retta sul piano τ passante per il punto $(1, 3, 2)$ ed ortogonale al piano π .

Esercizio 3. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \mid x + 2y - 2z = 0\}.$$

- (i) Trovare una base ortonormale di U .
- (ii) Trovare $U^\perp$.
- (iii) Completare la base trovata in (i) in una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
- (iv) Dato il vettore $v = (1, -2, -1)$ scrivere v come somma di un vettore di U e di un vettore di $U^\perp$.

Domande:

1) Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ avente gli autovettori $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (3, -1)$ associati, rispettivamente, agli autovalori 0,1, e sia A la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

- (a) La matrice A è simmetrica?
- (b) Determinare la matrice A .

2) Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice tale che $A^2 + I_2 = 0$ (dove $A^2 = AA$).

- (a) Esibire una matrice soddisfacente la condizione richiesta.
- (b) Dimostrare che A è invertibile.
- (c) Dimostrare che A non possiede autovalori reali.

PARTE FACOLTATIVA

Integrazione della prova orale

1. Dare la definizione di endomorfismo di uno spazio vettoriale. Fare un esempio di un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ ed un esempio di una applicazione non lineare di $\mathbb{R}^2$ in se stesso.
2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Mostrare che un sottospazio W di V di dimensione n coincide con V .
3. Dimostrare la formula della distanza di un punto da una retta nel piano euclideo.

Integrazione della prova parziale

Si consideri, al variare del parametro reale s , l'applicazione lineare

$$T_s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

così definita:

$$T_s(x, y, z) = (y + (s + 5)z, sx + 2sy + 2z, x + 2y - z).$$

- (a) Determinare, al variare del parametro s , il nucleo e l'immagine di T_s . Per quali valori di s l'applicazione T_s è invertibile?
- (b) Determinare, al variare di s , la controimmagine del vettore $(1, s^2, s) \in \mathbb{R}^3$.
- (c) Posto $s = -2$ determinare un sottospazio W_1 di $\mathbb{R}^3$ tale che $\text{Im}T_{-2} \oplus W_1 = \mathbb{R}^3$; determinare inoltre un sottospazio W_2 di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = \text{Im}T_{-2} + W_2$ ma la somma non sia diretta.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.