

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA o AEROSPAZIALE

Corso di Matematica 2

PADOVA 26-10-2002

Tema n.4

1. Siano $U = \langle (0, 1, 1, 0), (1, 0, -1, 2) \rangle$, $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\}$.

- Si determini la dimensione di U e la dimensione di V .
- Si calcoli una base di $U \cap V$.
- Si dica se $U + V$ è somma diretta.

2. Si scriva la matrice dell'applicazione lineare L_t di $\mathbf{R}^3$ in se stesso, rispetto alla base canonica, definita dalle tre condizioni

$$L_t(1, 0, 0) = (1, t, -t), \quad L_t(0, 0, 1) = (0, 1, 0), \quad L_t(0, 1, 0) = (-t, 0, 1).$$

- Si dica se esiste qualche valore di t per cui $\dim \ker(L_t) = 2$. Quale?
- Si dica se per $t = 1$ la somma $\ker(L_1) + \operatorname{Im}(L_1)$ è diretta.
- Si calcoli $\operatorname{Im}(L_t)$ nei casi in cui $\dim \operatorname{Im}(L_t) = 2$.
- Si calcolino gli autovalori e gli autospazi dell'applicazione L_1 .

3. Si consideri il sistema lineare nelle incognite (x_1, x_2, x_3)

$$\Sigma_t : \begin{cases} x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + tx_1 &= 1 + t \\ x_1 + tx_2 &= 0 \\ x_3 - tx_1 &= 0 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

- Si dica per quali valori di $t \in \mathbf{R}$ Σ_t ammette soluzioni.
- Si risolva Σ_t per ogni $t \in \mathbf{R}$ determinato sopra.
- Si dica se esiste qualche valore di t per cui Σ_t ha come soluzioni un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$. Quale?
- Si dica se per $t = -1$ la somma di due soluzioni è ancora una soluzione.

Dopo aver risposto alle domande precedenti, si dica se, giustificando le risposte:

- Siano $A, B \in M_2(\mathbf{R})$, con $A \neq B$, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = 2$. Risulta $\operatorname{rg}(A + B) = 2$?
- È possibile costruire un endomorfismo $f \in \operatorname{End}(\mathbf{R}^3)$ per cui risulti $\operatorname{Im}(f) = \ker(f)$?