LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

I^a prova di accertamento – Padova 27-10-07

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Una funzione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ è sempre suriettiva.

b) Un insieme finito di vettori tutti diversi dal vettore nullo è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

c) Se un sistema lineare ha due soluzioni distinte allora ne ha infinite.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y - \alpha z = 1 \\ 2x - y = -3 \\ \alpha x - 5z = 5 \end{cases}$$

ammette soluzione. Per quali valori di α la soluzione non è unica? Deteminare le soluzioni per tali valori.

Esercizio 2 Sia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a + b + 2c + d, b + c + d, -a + b).$$

Determinare il nucleo e l'immagine di f. Determinare poi la controimmagine del vettore $(1, 1, -1)$ mediante f.

Esercizio 3 Sia S_k il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1 + k, -3 + k, 0)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

a) Calcolare la dimensione di S_k al variare di k.

b) Posto $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$, determinare $S_k \cap T$ e $S_k + T$ al variare di k.

c) Posto $k = 2$, determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $S_2 \oplus W = T \oplus W = \mathbb{R}^3$.

d) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = v$ per ogni $v \in T$ e $\ker(f) \subset S_2$. Stabilire se esiste una sola funzione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Matematica 2
I^a prova di accertamento – Padova 27-10-07
TEMA n.2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Il nucleo di una funzione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ può essere nullo.

b) Tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti se non sono a due a due proporzionali.

c) Un sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite non ha soluzioni.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 5y + \alpha z = 1 \\ 3x - y = -1 \\ \alpha x + z = 1 \end{cases}$$

ammette soluzione. Per quali valori di α la soluzione non è unica? Deteminare le soluzioni per tali valori.

Esercizio 2 Sia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto (x + 2y + z + t, y + z + t, -x + z).$$

Determinare il nucleo e l'immagine di f. Determinare poi la controimmagine del vettore $(1, -1, 1)$ mediante f.

Esercizio 3 Sia S_r il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2r + 2, -r - 2, -1)$ al variare di $r \in \mathbb{R}$.

a) Calcolare la dimensione di S_r al variare di r.

b) Posto $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z = 0\}$, determinare $S_r \cap T$ e $S_r + T$ al variare di r.

c) Posto $r = 1$, determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $S_1 \oplus W = T \oplus W = \mathbb{R}^3$.

d) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = v$ per ogni $v \in T$ e $\ker(f) \subset S_1$. Stabilire se esiste una sola funzione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

I^a prova di accertamento – Padova 27-10-07

TEMA n.3

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Una funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ è sempre iniettiva.

b) Se i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono generatori di uno spazio vettoriale V, anche $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ sono generatori.

c) Se $(1, 1, 1)$ è soluzione di un sistema lineare allora anche $(2, 2, 2)$ è soluzione dello stesso sistema lineare.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 3 \\ 2x - y = 1 \\ kx + 5z = 5 \end{cases}$$

ammette soluzione. Per quali valori di k la soluzione non è unica? Deteminare le soluzioni per tali valori.

Esercizio 2 Sia $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (2a + b + c + d, a + b + d, b - c).$$

Determinare il nucleo e l'immagine di g. Determinare poi la controimmagine del vettore $(-1, 1, 1)$ mediante g.

Esercizio 3 Sia S_h il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-1 + h, -2h, -1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

a) Calcolare la dimensione di S_h al variare di h.

b) Posto $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y - z = 0\}$, determinare $S_h \cap T$ e $S_h + T$ al variare di h.

c) Posto $h = -2$, determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $S_{-2} \oplus W = T \oplus W = \mathbb{R}^3$.

d) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = v$ per ogni $v \in S_{-2}$ e $\ker(f) \subset T$. Stabilire se esiste una sola funzione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

I^a prova di accertamento – Padova 27-10-07

TEMA n.4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) L'immagine di una funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ ha dimensione 2.

b) Se la somma dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ non è uguale al vettore nullo, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti.

c) Un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite ha infinite soluzioni.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 3y + kz = 1 \\ 5x - y = 1 \\ kx + z = 1 \end{cases}$$

ammette soluzione. Per quali valori di k la soluzione non è unica? Deteminare le soluzioni per tali valori.

Esercizio 2 Sia $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto (x + y + z + 2t, y + z + t, -x + y).$$

Determinare il nucleo e l'immagine di g. Determinare poi la controimmagine del vettore $(1, -1, 1)$ mediante g.

Esercizio 3 Sia S_t il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (t, 0, -2 + t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

a) Calcolare la dimensione di S_t al variare di t.

b) Posto $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - z = 0\}$, determinare $S_t \cap T$ e $S_t + T$ al variare di t.

c) Posto $t = 1$, determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $S_1 \oplus W = T \oplus W = \mathbb{R}^3$.

d) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = v$ per ogni $v \in S_1$ e $\ker(f) \subset T$. Stabilire se esiste una sola funzione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate