

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

II^a prova di accertamento – Padova GG-MM-AA

TEMA n.1

Esercizio 1 Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alle basi canoniche è:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia poi $g_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alle basi canoniche è A_α^T .

- Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore $g_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha norma minima?
- Scrivere la matrice dell'applicazione $g_\alpha \circ f_\alpha$ rispetto alle basi canoniche.
- Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali 1 è autovalore dell'endomorfismo $g_\alpha \circ f_\alpha$.
- Per valori di α trovati al punto precedente, determinare, se esiste, una base ortonormale di autovettori di $g_\alpha \circ f_\alpha$.

Esercizio 2 Al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$M_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 2\beta^2 - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\beta^2 - \beta - 1 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

- Determinare i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali M_β è diagonalizzabile in \mathbb{R} .
- Determinare i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali M_β è diagonalizzabile in \mathbb{C} .
- Per i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali M_β non è diagonalizzabile, determinarne la forma di Jordan.
- Per valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali M_β ha un autovalore di molteplicità algebrica almeno 3, determinare una matrice H tale che $H^{-1}M_\beta H$ sia una matrice diagonale o di Jordan.
- Dire se esistono valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che M_β sia una isometria e dire di quale tipo di isometria si tratta.
- Per $\beta = -1$, determinare una matrice K a coefficienti reali o complessi tale che $K^{-1}M_{-1}K$ sia una matrice diagonale o di Jordan.

Esercizio 3 Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui la distanza tra le due rette

$$r : \begin{cases} x - k^2 = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} ; \quad s : \begin{cases} x - z - k = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$$

è pari a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate