CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, CHIMICA-MATERIALI, AMBIENTE E TERRITORIO

Padova 4-04-06

II appello

TEMA n.1

Esercizio 1. Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} (\alpha+1)x + (2\alpha+2)y - (\alpha+1)z = 0 \\ (3\alpha+3)x - (1+\alpha)z = 2\alpha+2 \\ (-\alpha-1)x + (1+\alpha)y = \alpha+1 \end{cases}$$

Risolvere il sistema quando possibile.

Esercizio 2. Data l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f_k(x,y,z) = ((k+2)x + (k+1)y + (k+1)z, -ky - kz, y+z),$$

i) scrivere la matrice F_k associata ad f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;

ii) determinare nucleo ed immagine di f_k al variare del parametro reale k;

iii) stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se la somma di $\ker f_k$ e $\mathrm{I}m\, f_k$ è diretta;

iv) stabilire per quali valori del parametro reale k la matrice F_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$;

v) per ognuno dei valori trovati in *iv)* determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F_k;

vi) posto $k=-2$, stabilire se la matrice F_{-2} è simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Le matrici A e F_{-2} sono ortogonalmente simili?

vii) Posto $k=1$, costruire, se possibile, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ non identicamente nulla tale che $g \circ f_1 = 0$. Determinare $f_1 \circ g$.

viii) Determinare la matrice associata ad f_k rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,-1,-1), (2,1,0)\}$.

Esercizio 3. Dato il sottospazio $U = \langle (1,0,1), (1,1,1) \rangle$, determinare i vettori $\mathbf{w} \in (0, \frac{1}{3}, 2) + \langle (3,1,-3) \rangle$ tali che $p_U(\mathbf{w}) = (1,1,1)$.

Esercizio 4. Dati i punti $A(1,-1,3)$ e $B(3,1,7)$ determinare:

i) equazioni cartesiane della retta passante per $O=(0,0,0)$ e parallela al vettore $B-A$;

ii) tutte le coppie di punti $\{C, D\}$ allineati con l'origine tali che il quadrilatero di vertici A, B, C, D sia un parallelogramma con un lato di lunghezza $\sqrt{5}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, CHIMICA-MATERIALI, AMBIENTE E TERRITORIO

Padova 4-04-06

II appello

TEMA n.2

Esercizio 1. Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} (5\alpha+5)x-(3\alpha+3)y+(2\alpha+2)z=\alpha+1 \\ (3\alpha+3)y+(3+3\alpha)z=0 \\ (\alpha+1)x+(\alpha+1)y+(2+2\alpha)z=\alpha+1 \end{cases}$$

Risolvere il sistema quando possibile.

Esercizio 2. Data l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f_k(x,y,z)=(x+y,-kx-ky,(k+1)x+(k+1)y+(k+2)z),$$

i) scrivere la matrice F_k associata ad f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;

ii) determinare nucleo ed immagine di f_k al variare del parametro reale k;

iii) stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se la somma di $\ker f_k$ e $\mathrm{I}m\, f_k$ è diretta;

iv) stabilire per quali valori del parametro reale k la matrice F_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$;

v) per ognuno dei valori trovati in *iv)* determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F_k;

vi) posto $k=-2$, stabilire se la matrice F_{-2} è simile alla matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Le matrici A e F_{-2} sono ortogonalmente simili?

vii) Posto $k=1$, costruire, se possibile, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ non identicamente nulla tale che $g \circ f_1 = 0$. Determinare $f_1 \circ g$.

viii) Determinare la matrice associata ad f_k rispetto alla base $\mathcal{B}=\{(1,-1,1),(-1,-1,-1),(1,2,0)\}$.

Esercizio 3. Dato il sottospazio $U=\langle(0,1,1),(5,1,1)\rangle$, determinare i vettori $\mathbf{w} \in (1,0,2)+\langle(-1,3,-3)\rangle$ tali che $p_U(\mathbf{w})=(1,1,1)$.

Esercizio 4. Dati i punti $A(2,2,1)$ e $B(3,3,3)$ determinare:

i) equazioni cartesiane della retta passante per $O=(0,0,0)$ e parallela al vettore $B-A$;

ii) tutte le coppie di punti $\{C,D\}$ allineati con l'origine tali che il quadrilatero di vertici A,B,C,D sia un parallelogramma con un lato di lunghezza $\sqrt{3}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, CHIMICA-MATERIALI, AMBIENTE E TERRITORIO

Padova 4-04-06

II appello

TEMA n.3

Esercizio 1. Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} (2\alpha - 2)x + (-\alpha + 1)y + (\alpha - 1)z = \alpha - 1 \\ (\alpha - 1)x + (1 - \alpha)y = 2\alpha - 2 \\ (3\alpha - 3)x + (\alpha - 1)y + (4\alpha - 4)z = 3\alpha - 3 \end{cases}$$

Risolvere il sistema quando possibile.

Esercizio 2. Data l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f_k(x, y, z) = (-kx - kz, (k + 1)x + (k + 2)y + (k + 1)z, x + z),$$

i) scrivere la matrice F_k associata ad f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;

ii) determinare nucleo ed immagine di f_k al variare del parametro reale k;

iii) stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se la somma di $\ker f_k$ e $\mathrm{I}m\, f_k$ è diretta;

iv) stabilire per quali valori del parametro reale k la matrice F_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$;

v) per ognuno dei valori trovati in *iv)* determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F_k;

vi) posto $k = -2$, stabilire se la matrice F_{-2} è simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Le matrici A e F_{-2} sono ortogonalmente simili?

vii) Posto $k = 1$, costruire, se possibile, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ non identicamente nulla tale che $g \circ f_1 = 0$. Determinare $f_1 \circ g$.

viii) Determinare la matrice associata ad f_k rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, -1), (2, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$.

Esercizio 3. Dato il sottospazio $U = \langle (1, 1, 0), (-1, -1, 2) \rangle$, determinare i vettori $\mathbf{w} \in (0, 2, 2) + \langle (3, -3, 5) \rangle$ tali che $p_U(\mathbf{w}) = (1, 1, 1)$.

Esercizio 4. Dati i punti $A(2, 0, 1)$ e $B(3, 1, 2)$ determinare:

i) equazioni cartesiane della retta passante per $O = (0, 0, 0)$ e parallela al vettore $B - A$;

ii) tutte le coppie di punti $\{C, D\}$ allineati con l'origine tali che il quadrilatero di vertici A, B, C, D sia un parallelogramma con un lato di lunghezza $\sqrt{2}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, CHIMICA-MATERIALI, AMBIENTE E TERRITORIO

Padova 4-04-06

II appello

TEMA n.4

Esercizio 1. Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} (\alpha-1)y + (-1+\alpha)z = 2\alpha - 2 \\ (\alpha-1)x + (\alpha-1)y + (2\alpha-2)z = 4\alpha - 4 \\ (2\alpha-2)x + (-1+\alpha)y + (3\alpha-3)z = 5\alpha - 5 \end{cases}$$

Risolvere il sistema quando possibile.

Esercizio 2. Data l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f_k(x,y,z) = (-kx - ky, x + y, (k+1)x + (k+1)y + (k+2)z),$$

i) scrivere la matrice F_k associata ad f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;

ii) determinare nucleo ed immagine di f_k al variare del parametro reale k;

iii) stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se la somma di $\ker f_k$ e $\mathrm{I}m\, f_k$ è diretta;

iv) stabilire per quali valori del parametro reale k la matrice F_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$;

v) per ognuno dei valori trovati in *iv*) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F_k;

vi) posto $k = -2$, stabilire se la matrice F_{-2} è simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Le matrici A e F_{-2} sono ortogonalmente simili?

vii) Posto $k = 1$, costruire, se possibile, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ non identicamente nulla tale che $g \circ f_1 = 0$. Determinare $f_1 \circ g$.

viii) Determinare la matrice associata ad f_k rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(0,1,2), (1,1,1), (-1,-1,1)\}$.

Esercizio 3. Dato il sottospazio $U = \langle (0,1,1), (3,1,1) \rangle$, determinare i vettori $\mathbf{w} \in (-1,2,0) + \langle (1,3,-3) \rangle$ tali che $p_U(\mathbf{w}) = (1,1,1)$.

Esercizio 4. Dati i punti $A(1,3,-1)$ e $B(2,5,0)$ determinare:

i) equazioni cartesiane della retta passante per $O = (0,0,0)$ e parallela al vettore $B - A$;

ii) tutte le coppie di punti $\{C, D\}$ allineati con l'origine tali che il quadrilatero di vertici A, B, C, D sia un parallelogramma con un lato di lunghezza $\sqrt{5}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.