LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 06-04-2005
TEMA n.1

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0),\ \mathbf{v}_2 = (3,1,0,1),\ \mathbf{v}_3 = (-1,1,1,2),\ \mathbf{v}_4 = (1,1,1,1),\ \mathbf{v}_5 = (4,2,1,0).$$

a) Questi vettori sono generatori di $\mathbb{R}^4$? Sono linearmente indipendenti?

b) Determinare una base ortonormale per il sottospazio $W =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ ax + (a^2 + a)z = 2a \end{cases}$$

ammette soluzioni. Determinare le soluzioni del sistema per tali valori di a.

Esercizio 3. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L(x, y, z) = (3x - 2y + 2z, x + z, -2x + 2y - z)$$

a) Verificare che L è lineare e scriverne la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) L è iniettiva? È suriettiva?

c) Determinare gli autospazi di L. L'endomorfismo L è diagonalizzabile?

Esercizio 4.

a) Scrivere delle equazioni cartesiane della retta r passante per $P(3, 5, 2)$ e $Q(-1, -7, -2)$.

b) Stabilire la posizione reciproca di r e della retta

$$r' : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - z = -2. \end{cases}$$

c) Calcolare la distanza tra r ed r'.

Esercizio 5. Sia ℓ la retta passante per $A = (0, -1, 0)$ parallela a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. Determinare la retta s del piano $\pi : 6x - y + 4z - 1 = 0$ complanare con la retta

$$s' : \begin{cases} x + z + 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

ed ortogonale ad ℓ. Studiare la posizione reciproca di s ed ℓ e dire se A è il punto di ℓ che ha distanza minima da s.

Esercizio 6. Sia $H \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale e sia $\gamma : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definita da $\gamma(A) = H^{-1}AH$.

a) γ è lineare? È iniettiva? È suriettiva?

b) Sia $V \subseteq M_n(\mathbb{R})$ is sottospazio delle matrici simmetriche: determinare $\gamma(V)$.

c) Dimostrare che 1 è un autovalore per l'endomorfismo γ.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 06-04-2005
TEMA n.2

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori:

$\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, -4, 1, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (-1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{v}_5 = (-4, 2, -1, 0)$.

a) Questi vettori sono generatori di $\mathbb{R}^4$? Sono linearmente indipendenti?

b) Determinare una base ortonormale per il sottospazio $W =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2z = -2 \\ -2x + y + 2z = 3 \\ -ax + (a^2 + a)z = 2a \end{cases}$$

ammette soluzioni. Determinare le soluzioni del sistema per tali valori di a.

Esercizio 3. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L(x, y, z) = (3x + y - 2z, -2x + 2z, 2x + y - z)$$

a) Verificare che L è lineare e scriverne la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) L è iniettiva? È suriettiva?

c) Determinare gli autospazi di L. L'endomorfismo L è diagonalizzabile?

Esercizio 4.

a) Scrivere delle equazioni cartesiane della retta r passante per $P(5, 3, 2)$ e $Q(-7, -1, -2)$.

b) Stabilire la posizione reciproca di r e della retta

$$r' : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - z = -2. \end{cases}$$

c) Calcolare la distanza tra r ed r'.

Esercizio 5. Sia ℓ la retta passante per $A = (-1, 0, 0)$ parallela a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. Determinare la retta s del piano $\pi : x - 6y - 4z + 1 = 0$ complanare con la retta

$$s' : \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ x - y - 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

ed ortogonale ad ℓ. Studiare la posizione reciproca di s ed ℓ e dire se A è il punto di ℓ che ha distanza minima da s.

Esercizio 6. Sia $H \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice invertibile e sia $\gamma : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definita da $\gamma(A) = H^{-1}AH$.

a) γ è lineare? È iniettiva? È suriettiva?

b) Sia $V \subseteq M_n(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici diagonali: determinare $\gamma(V)$.

c) Dimostrare che 1 è un autovalore per l'endomorfismo γ.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 06-04-2005
TEMA n.3

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1,0),\ \mathbf{v}_2 = (-1,1,1,1),\ \mathbf{v}_3 = (-2,1,1,-4),\ \mathbf{v}_4 = (1,2,3,4),\ \mathbf{v}_5 = (3,1,1,0).$$

a) Questi vettori sono generatori di $\mathbb{R}^4$? Sono linearmente indipendenti?

b) Determinare una base ortonormale per il sottospazio $W =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = -3 \\ x - y - 3z = -4 \\ ay + (a^2 + a)z = 2a \end{cases}$$

ammette soluzioni. Determinare le soluzioni del sistema per tali valori di a.

Esercizio 3. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L(x, y, z) = (x + y + z, 4x + y - 2z, -2x + y + 4z)$$

a) Verificare che L è lineare e scriverne la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) L è iniettiva? È suriettiva?

c) Determinare gli autospazi di L. L'endomorfismo L è diagonalizzabile?

Esercizio 4.

a) Scrivere delle equazioni cartesiane della retta r passante per $P(3, 2, 5)$ e $Q(-1, -2, -7)$.

b) Stabilire la posizione reciproca di r e della retta

$$r' : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2z - y = -2. \end{cases}$$

c) Calcolare la distanza tra r ed r'.

Esercizio 5. Sia ℓ la retta passante per $A = (0, 0, -1)$ parallela a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. Determinare la retta s del piano $\pi : 6x + 4y - z - 1 = 0$ complanare con la retta

$$s' : \begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

ed ortogonale ad ℓ. Studiare la posizione reciproca di s ed ℓ e dire se A è il punto di ℓ che ha distanza minima da s.

Esercizio 6. Sia $H \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale e sia $\gamma : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definita da $\gamma(A) = H^{-1}AH$.

a) γ è lineare? È iniettiva? È suriettiva?

b) Sia $V \subseteq M_n(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici simmetriche: determinare $\gamma(V)$.

c) Dimostrare che 1 è un autovalore per l'endomorfismo γ.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 06-04-2005
TEMA n.4

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0),\ \mathbf{v}_2 = (2, 1, 1, 0),\ \mathbf{v}_3 = (-1, 1, 1, 1),\ \mathbf{v}_4 = (-2, -1, -1, 2),\ \mathbf{v}_5 = (-3, -1, 1, 0).$$

a) Questi vettori sono generatori di $\mathbb{R}^4$? Sono linearmente indipendenti?

b) Determinare una base ortonormale per il sottospazio $W =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + 2y - z = 3 \\ ax + (a^2 + a)y = 2a \end{cases}$$

ammette soluzioni. Determinare le soluzioni del sistema per tali valori di a.

Esercizio 3. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L(x, y, z) = (x + 4y - 2z, x + y + z, x - 2y + 4z)$$

a) Verificare che L è lineare e scriverne la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) L è iniettiva? È suriettiva?

c) Determinare gli autospazi di L. L'endomorfismo L è diagonalizzabile?

Esercizio 4.

a) Scrivere delle equazioni cartesiane della retta r passante per $P(2, 5, 3)$ e $Q(-2, -7, -1)$.

b) Stabilire la posizione reciproca di r e della retta

$$r' : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 2y = 0. \end{cases}$$

c) Calcolare la distanza tra r ed r'.

Esercizio 5. Sia ℓ la retta passante per $A = (0, -1, 0)$ parallela a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. Determinare la retta s del piano $\pi : 4x - y + 6z - 1 = 0$ complanare con la retta

$$s' : \begin{cases} 2x - y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

ed ortogonale ad ℓ. Studiare la posizione reciproca di s ed ℓ e dire se A è il punto di ℓ che ha distanza minima da s.

Esercizio 6. Sia $H \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice invertibile e sia $\gamma : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definita da $\gamma(A) = H^{-1}AH$.

a) γ è lineare? È iniettiva? È suriettiva?

b) Sia $V \subseteq M_n(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici diagonali: determinare $\gamma(V)$.

c) Dimostrare che 1 è un autovalore per l'endomorfismo γ.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.