LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

Padova 7-1-08

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Il rango di una matrice è il numero di righe non nulle.

b) Se $\det A = 14$ allora $\det(A^2) = 28$.

c) In $\mathbb{A}^2$, la distanza di $P(1,2)$ da $r : x + y = 0$ è $\frac{3}{2}$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Determinare parte reale e parte immaginaria del numero $\frac{2+3i}{1-5i} \in \mathbb{C}$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + 3t, 2x - y + z + 4t, x - 3y + z + t).$$

a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare nucleo ed immagine di f. L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?

c) Calcolare la controimmagine del vettore $(1, 5, 4)$.

d) Scrivere la matrice di f nella base $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e canonica di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3 Si considerino i sottospazi $U = \langle(1, 2, -1, 2), (1, 1, 1, -1)\rangle$ e $W = \langle(1, 3, -4, -6), (1, 0, 4, 9)\rangle$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Determinare una base di $U \cap W$.

b) Determinare una base di $U + W$. Tale somma è diretta?

c) Calcolare la proiezione ortogonale su U di $(1, 0, 4, 9)$.

Esercizio 4 Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -6 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare, se esistono, una matrice diagonale D ed una matrice H in modo che $A = HDH^{-1}$.

Esercizio 5 Scrivere le equazioni della retta r passante per i punti $(1, 1, 1)$ e $(3, 2, 0)$. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare la posizione reciproca tra r e la retta

$$s_\alpha : \begin{cases} x + 2z = 4\alpha + 3 \\ 3(\alpha - 1)x + y + z = 6\alpha - 1 \end{cases}.$$

Esercizio 6 Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dimostrare che la funzione $\varphi : \mathbb{R}^{\leq 3}[X] \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $X^i \to A^i$ è lineare e scriverne la matrice rispetto alla base $\{1, X, X^2, X^3\}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ ed alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$. Determinarne nucleo ed immagine. Dimostrare che se $B, C \in \operatorname{Im} \varphi$ allora B e C commutano ($BC = CB$).

Esercizio 7 Siano U e W sottospazi tali che $\mathbb{R}^{712} = U \oplus W$. Dimostrare che la proiezione su U, definita da $p_U(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}$, è un endomorfismo diagonalizzabile di $\mathbb{R}^{712}$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Matematica 2
Padova 7-1-08
TEMA n.2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Il rango di una matrice è uguale al numero di colonne linearmente indipendenti.

b) Se $\det A = 14$ allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{14}$.

c) In $\mathbb{A}^2$, la distanza di $P(1,2)$ da $r : x - y = 0$ è $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Determinare parte reale e parte immaginaria del numero $\frac{2+3i}{1+5i} \in \mathbb{C}$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$f(x, y, z, t) = (x + y + 2z + 2t, 3x + y - 2t, 2x + y + z).$$

a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare nucleo ed immagine di f. L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?

c) Calcolare la controimmagine del vettore $(0, 4, 2)$.

d) Scrivere la matrice di f nella base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (4, 1, 1), (3, 5, -1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e canonica di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3 Si considerino i sottospazi $U = \langle(1, 0, 2, 3), (3, 1, 2, 0)\rangle$ e $W = \langle(1, -1, 4, -3), (1, 2, -4, 0)\rangle$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Determinare una base di $U \cap W$.

b) Determinare una base di $U + W$. Tale somma è diretta?

c) Calcolare la proiezione ortogonale su U di $(1, 2, -4, 0)$.

Esercizio 4 Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinare, se esistono, una matrice diagonale D ed una matrice H in modo che $A = HDH^{-1}$.

Esercizio 5 Scrivere le equazioni della retta r passante per i punti $(1, 1, 1)$ e $(0, 4, 2)$. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare la posizione reciproca tra r e la retta

$$s_\alpha : \begin{cases} x + y - 2z = 3 - 3\alpha \\ x - (\alpha - 1)z = 4 - 3\alpha \end{cases} .$$

Esercizio 6 Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Dimostrare che la funzione $\varphi : \mathbb{R}^{\leq 3}[X] \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $X^i \to A^i$ è lineare e scriverne la matrice rispetto alla base $\{1, X, X^2, X^3\}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ ed alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$. Determinarne nucleo ed immagine. Dimostrare che se $B, C \in \operatorname{Im}\varphi$ allora B e C commutano ($BC = CB$).

Esercizio 7 Siano U e W sottospazi tali che $\mathbb{R}^{391} = U \oplus W$. Dimostrare che la simmetria di asse U, definita da $\sigma_U(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} - \mathbf{w}$, è un endomorfismo diagonalizzabile di $\mathbb{R}^{391}$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Matematica 2
Padova 7-1-08
TEMA n.3

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Una matrice con 3 righe e 4 colonne non può avere rango 4.

b) Se $\det A = 14$ allora $\det(A^2) = 98$.

c) In $\mathbb{A}^2$, la distanza di $P(1,1)$ da $r : x + y = 0$ è $\sqrt{2}$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Determinare parte reale e parte immaginaria del numero $\frac{2-3i}{1+5i} \in \mathbb{C}$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$f(x, y, z, t) = (x - y + 2z, 2x + y + 2z - t, x + 2y - t).$$

a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare nucleo ed immagine di f. L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?

c) Calcolare la controimmagine del vettore $(0, 2, 2)$.

d) Scrivere la matrice di f nella base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, 2, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e canonica di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3 Si considerino i sottospazi $U = \langle(1, -1, 0, -1), (1, 2, 3, 2)\rangle$ e $W = \langle(1, -1, 1, -1), (3, 0, 4, 0)\rangle$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Determinare una base di $U \cap W$.

b) Determinare una base di $U + W$. Tale somma è diretta?

c) Calcolare la proiezione ortogonale su U di $(3, 0, 4, 0)$.

Esercizio 4 Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare, se esistono, una matrice diagonale D ed una matrice H in modo che $A = HDH^{-1}$.

Esercizio 5 Scrivere le equazioni della retta r passante per i punti $(1, 1, 1)$ e $(3, 0, 2)$. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare la posizione reciproca tra r e la retta

$$s_\alpha : \begin{cases} x + 2y = 7 - 4\alpha \\ 3\alpha x - y - z = 6\alpha - 5 \end{cases}.$$

Esercizio 6 Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dimostrare che la funzione $\varphi : \mathbb{R}^{\leq 3}[X] \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $X^i \to A^i$ è lineare e scriverne la matrice rispetto alla base $\{1, X, X^2, X^3\}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ ed alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$. Determinarne nucleo ed immagine. Dimostrare che se $B, C \in \operatorname{Im} \varphi$ allora B e C commutano ($BC = CB$).

Esercizio 7 Siano U e W sottospazi tali che $\mathbb{R}^{863} = U \oplus W$. Dimostrare che la proiezione su W, definita da $p_W(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{w}$, è un endomorfismo diagonalizzabile di $\mathbb{R}^{863}$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

Padova 7-1-08

TEMA n.4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Una matrice 3×3 con determinante nullo ha rango 2.

b) Se $\det A = 14$ allora $\det(A^2) = 196$.

c) In $\mathbb{A}^2$, la distanza di $P(2,1)$ da $r : x - y = 0$ è $\frac{1}{2}$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Determinare parte reale e parte immaginaria del numero $\frac{2-3i}{1-5i} \in \mathbb{C}$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + t, x - z + t, x + y + z + t).$$

a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare nucleo ed immagine di f. L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?

c) Calcolare la controimmagine del vettore $(2, 0, 1)$.

d) Scrivere la matrice di f nella base $\mathcal{B} = \{(1, 4, 3), (1, 1, 5), (0, 1, -1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e canonica di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3 Si considerino i sottospazi $U = \langle (1, 4, -1, 3), (1, -2, -1, -1) \rangle$ e $W = \langle (1, 0, 1, 1), (2, 1, 0, 2) \rangle$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Determinare una base di $U \cap W$.

b) Determinare una base di $U + W$. Tale somma è diretta?

c) Calcolare la proiezione ortogonale su U di $(2, 1, 0, 2)$.

Esercizio 4 Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinare, se esistono, una matrice diagonale D ed una matrice H in modo che $A = HDH^{-1}$.

Esercizio 5 Scrivere le equazioni della retta r passante per i punti $(1, 1, 1)$ e $(0, 2, 4)$. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare la posizione reciproca tra r e la retta

$$s_\alpha : \begin{cases} x - 2y + z = 3\alpha \\ x + \alpha y = 3\alpha + 1 \end{cases}.$$

Esercizio 6 Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dimostrare che la funzione $\varphi : \mathbb{R}^{\leq 3}[X] \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $X^i \to A^i$ è lineare e scriverne la matrice rispetto alla base $\{1, X, X^2, X^3\}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ ed alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$. Determinarne nucleo ed immagine. Dimostrare che se $B, C \in \operatorname{Im} \varphi$ allora B e C commutano ($BC = CB$).

Esercizio 7 Siano U e W sottospazi tali che $\mathbb{R}^{407} = U \oplus W$. Dimostrare che la simmetria di asse W, definita da $\sigma_W(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = -\mathbf{u} + \mathbf{w}$, è un endomorfismo diagonalizzabile di $\mathbb{R}^{407}$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate