LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 08-09-09
TEMA 1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) L'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, è lineare.

b) L'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$, nelle incognite x, y, z, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1.

c) Ogni retta nello spazio affine tridimensionale può essere descritta mediante un'equazione lineare in tre incognite.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1) \rangle, \qquad T = \{(a, -a, a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Stabilire se i vettori di T sono ortogonali a tutti i vettori di S.
2. Calcolare $S^\perp$ e stabilire se $S^\perp = T$.
3. Stabilire se esistono vettori di $\mathbb{R}^4$ la cui proiezione ortogonale su S sia $(1, -1, 1, -1)$. In caso affermativo determinarli tutti.
4. Sia Σ_λ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y = \lambda \\ x + y + t = 0 \\ \lambda x - y = 0 \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z, t, al variare del parametro reale λ. Determinare, se esistono, i valori di λ tali che tutti i vettori di Σ_λ abbiano proiezione ortogonale nulla su S.

Esercizio 2 Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, le applicazioni lineari descritte rispetto alle basi canoniche, rispettivamente, dalle seguenti matrici:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare, se possibile, i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che g_α abbia nucleo di dimensione 1.
2. Determinare le matrici associate alle applicazioni lineari $f \circ g_\alpha$ e $g_\alpha \circ f$ rispetto alle basi canoniche.
3. Determinare, se possibile, i valori del parametro reale α tali che $f \circ g_\alpha$ sia invertibile.
4. Stabilire per quali valori di α l'applicazione $f \circ g_\alpha$ è diagonalizzabile.

(*continua*)

Esercizio 3 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice di un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

1. Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica nel dominio e codominio.
2. Stabilire se esistono basi di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice f sia

   $$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   In caso affermativo determinare tali basi.
3. Stabilire se l'applicazione f è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ non ortogonale costituita da autovettori di f.
4. Stabilire se l'applicazione f è ortogonalmente diagonalizzabile. In caso affermativo determinare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.
5. Determinare, se esiste, una matrice H tale che $H^{-1}BH$ sia una matrice di Jordan.

Esercizio 4 Nello spazio euclideo tridimensionale:

(a) Determinare il piano π passante per i punti $P = (1,1,1)$ e $Q = (0,1,0)$, parallelo alla retta t di equazioni $t : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 1. \end{cases}$

(b) Determinare una retta r ortogonale al piano π e passante per il punto P.

(c) Determinare, se possibile, una retta s parallela alla retta r e avente distanza 1 da r. Quante rette esistono soddisfacenti tali condizioni?

(d) Determinare, se possibile, due rette soddisfacenti le condizioni del punto (c) e aventi distanza reciproca uguale a 2.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 08-09-09
Tema 2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) L'applicazione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$, è lineare.

b) L'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$, nelle incognite x, y, z, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1.

c) Un sistema lineare di due equazioni in tre incognite descrive sempre una retta nello spazio affine tridimensionale.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (1, -1, 1, -1), (1, 0, 0, -1) \rangle, \qquad T = \{(t, t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

1. Stabilire se i vettori di T sono ortogonali a tutti i vettori di S.
2. Calcolare $S^\perp$ e stabilire se $S^\perp = T$.
3. Stabilire se esistono vettori di $\mathbb{R}^4$ la cui proiezione ortogonale su S sia $(1, 1, 1, 1)$. In caso affermativo determinarli tutti.
4. Sia Σ_λ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2t = \lambda \\ x + y + t = 0 \\ \lambda x - t = 0 \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z, t, al variare del parametro reale λ. Determinare, se esistono, i valori di λ tali che tutti i vettori di Σ_λ abbiano proiezione ortogonale nulla su S.

Esercizio 2 Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g_\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\beta \in \mathbb{R}$, le applicazioni lineari descritte rispetto alle basi canoniche, rispettivamente, dalle seguenti matrici:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \beta & \beta + 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

1. Determinare, se possibile, i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che g_β abbia nucleo di dimensione 1.
2. Determinare le matrici associate alle applicazioni lineari $f \circ g_\beta$ e $g_\beta \circ f$ rispetto alle basi canoniche.
3. Determinare, se possibile, i valori del parametro reale β tali che $f \circ g_\beta$ sia suriettiva.
4. Stabilire per quali valori di β l'applicazione $f \circ g_\beta$ è diagonalizzabile.

(*continua*)

Esercizio 3 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice di un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2,-1,0),(0,-1,2),(0,0,2)\}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

1. Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica nel dominio e codominio.

2. Stabilire se esistono basi di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice f sia

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   In caso affermativo determinare tali basi.

3. Stabilire se l'applicazione f è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ non ortogonale costituita da autovettori di f.

4. Stabilire se l'applicazione f è ortogonalmente diagonalizzabile. In caso affermativo determinare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.

5. Determinare, se esiste, una matrice H tale che $H^{-1}BH$ sia una matrice di Jordan.

Esercizio 4 Nello spazio euclideo tridimensionale:

(a) Determinare il piano σ passante per i punti $P = (1,1,1)$ e $Q = (1,0,0)$, parallelo alla retta s di equazioni $s : \begin{cases} y - x = 0 \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

(b) Determinare una retta t ortogonale al piano σ e passante per il punto Q.

(c) Determinare, se possibile, una retta r parallela alla retta t e avente distanza 2 da t. Quante rette esistono soddisfacenti tali condizioni?

(d) Determinare, se possibile, due rette soddisfacenti le condizioni del punto (c) e aventi distanza reciproca uguale ad 1.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 08-09-09
TEMA 3

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (3x, 3y + 1)$, è lineare.

b) L'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y + z - t = 1 \end{cases}$, nelle incognite x, y, z, t, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2.

c) Ogni piano nello spazio affine tridimensionale può essere descritto mediante un sistema lineare in tre incognite di rango 1.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle(-1, -1, 1, 1), (0, -1, 0, 1)\rangle, \qquad T = \{(a, a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Stabilire se i vettori di T sono ortogonali a tutti i vettori di S.
2. Calcolare $S^\perp$ e stabilire se $S^\perp = T$.
3. Stabilire se esistono vettori di $\mathbb{R}^4$ la cui proiezione ortogonale su S sia $(2, 2, 2, 2)$. In caso affermativo determinarli tutti.
4. Sia Σ_λ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2z = \lambda \\ x + z + t = 0 \\ \lambda x - z = 0 \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z, t, al variare del parametro reale λ. Determinare, se esistono, i valori di λ tali che tutti i vettori di Σ_λ abbiano proiezione ortogonale nulla su S.

Esercizio 2 Siano $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ le applicazioni lineari descritte rispetto alle basi canoniche, rispettivamente, dalle seguenti matrici:

$$F_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare, se possibile, i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che φ_α sia iniettiva.
2. Determinare le matrici associate alle applicazioni lineari $\varphi_\alpha \circ \psi$ e $\psi \circ \varphi_\alpha$ rispetto alle basi canoniche.
3. Determinare, se possibile, i valori del parametro reale α tali che $\varphi_\alpha \circ \psi$ sia invertibile.
4. Stabilire per quali valori di α l'applicazione $\varphi_\alpha \circ \psi$ è diagonalizzabile.

(*continua*)

Esercizio 3 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice di un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,-1,1),(0,1,2),(0,0,3)\}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

1. Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica nel dominio e codominio.
2. Stabilire se esistono basi di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice f sia

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   In caso affermativo determinare tali basi.
3. Stabilire se l'applicazione f è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ non ortogonale costituita da autovettori di f.
4. Stabilire se l'applicazione f è ortogonalmente diagonalizzabile. In caso affermativo determinare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.
5. Determinare, se esiste, una matrice H tale che $H^{-1}BH$ sia una matrice di Jordan.

Esercizio 4 Nello spazio euclideo tridimensionale:

(a) Determinare il piano π passante per i punti $P = (1,1,2)$ e $Q = (0,1,1)$, parallelo alla retta t di equazioni $t : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2z = 1. \end{cases}$

(b) Determinare una retta r ortogonale al piano π e passante per il punto Q.

(c) Determinare, se possibile, una retta s parallela alla retta r e avente distanza $\frac{1}{2}$ da r. Quante rette esistono soddisfacenti tali condizioni?

(d) Determinare, se possibile, due rette soddisfacenti le condizioni del punto (c) e aventi distanza reciproca uguale ad 1.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 08-09-09
TEMA 4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (3x - y, 3y - x)$, è lineare.

b) L'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} 2x + y - z + t = 0 \\ 4x + 2y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$, nelle incognite x, y, z, t, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2.

c) Ogni sistema lineare in tre incognite di rango 1 descrive un piano nello spazio affine tridimensionale.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (1, 2, 1, 1), (0, 2, 0, 1) \rangle, \qquad T = \{(a, 0, -a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Stabilire se i vettori di T sono ortogonali a tutti i vettori di S.
2. Calcolare $S^\perp$ e stabilire se $S^\perp = T$.
3. Stabilire se esistono vettori di $\mathbb{R}^4$ la cui proiezione ortogonale su S sia $(2, 0, -2, 0)$. In caso affermativo determinarli tutti.
4. Sia Σ_λ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare
$$\begin{cases} x + 2t = -\lambda \\ x + y + t = 0 \\ \lambda x + t = 0 \end{cases}$$
nelle incognite x, y, z, t, al variare del parametro reale λ. Determinare, se esistono, i valori di λ tali che tutti i vettori di Σ_λ abbiano proiezione ortogonale nulla su S.

Esercizio 2 Siano $f_\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\beta \in \mathbb{R}$, e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ le applicazioni lineari descritte rispetto alle basi canoniche, rispettivamente, dalle seguenti matrici:

$$F_\beta = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare, se possibile, i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che F_β abbia nucleo di dimensione 1.
2. Determinare le matrici associate alle applicazioni lineari $f_\beta \circ g$ e $g \circ f_\beta$ rispetto alle basi canoniche.
3. Determinare, se possibile, i valori del parametro reale β tali che $f_\beta \circ g$ sia iniettiva.
4. Stabilire per quali valori di β l'applicazione $f_\beta \circ g$ è diagonalizzabile.

(*continua*)

Esercizio 3 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice di un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(0,0,-1), (0,-1,1), (2,0,1)\}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

1. Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica nel dominio e codominio.
2. Stabilire se esistono basi di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice f sia

   $$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   In caso affermativo determinare tali basi.
3. Stabilire se l'applicazione f è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ non ortogonale costituita da autovettori di f.
4. Stabilire se l'applicazione f è ortogonalmente diagonalizzabile. In caso affermativo determinare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.
5. Determinare, se esiste, una matrice H tale che $H^{-1}BH$ sia una matrice di Jordan.

Esercizio 4 Nello spazio euclideo tridimensionale:

(a) Determinare il piano π passante per i punti $P = (2,1,2)$ e $Q = (0,1,0)$, parallelo alla retta t di equazioni $t : \begin{cases} z - y = 0 \\ 2y + z = 1. \end{cases}$

(b) Determinare una retta r ortogonale al piano π e passante per il punto P.

(c) Determinare, se possibile, una retta s parallela alla retta r e avente distanza 2 da r. Quante rette esistono soddisfacenti tali condizioni?

(d) Determinare, se possibile, due rette soddisfacenti le condizioni del punto (c) e aventi distanza reciproca uguale a 1.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate