

**Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E  
MECCANICA**

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 09-09-2010

TEMA n.1

**PARTE 1. Quesiti preliminari**

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare a coefficienti reali in 3 variabili è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .
2. Nello spazio affine tridimensionale due rette non complanari sono sghembe.
3. La matrice nulla  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  non è diagonalizzabile.

**PARTE 2. Esercizi**

**Esercizio 1** Si considerino la varietà lineare  $S$  e, al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il sistema lineare  $\Sigma_\lambda$ :

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad \Sigma_\lambda : \begin{cases} x - 2y + 3z - 3t = -1 \\ x + (2\lambda + 1)z + t = 2\lambda + 3 \\ 3x - 2y + (3\lambda + 4)z + (\lambda - 1)t = 3\lambda + 3. \end{cases}$$

- a) Scrivere un sistema lineare  $\Sigma'$  il cui insieme delle soluzioni sia  $S$ .
- b) Determinare i valori di  $\lambda \in \mathbb{R}$  per i quali  $\Sigma'$  e  $\Sigma_\lambda$  hanno soluzioni in comune.
- c) Per i valori di  $\lambda \in \mathbb{R}$  trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra  $\Sigma'$  e  $\Sigma_\lambda$ .

**Esercizio 2** Si consideri, al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$ :

$$f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x - y - (1 + 2\alpha)z \\ (\alpha + 1)x + (1 - \alpha)y + \alpha z \\ y + (1 + \alpha)z \end{pmatrix}.$$

- a) Scrivere la matrice  $A_\alpha$  di  $f_\alpha$  rispetto alle basi canoniche.
- b) Stabilire per quali valori del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f_\alpha$  è invertibile.
- c) Calcolare il polinomio caratteristico di  $f_\alpha$  [Suggerimento: sviluppare il determinante secondo la prima colonna] e stabilire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f_\alpha$  è diagonalizzabile.
- d) Nei casi in cui  $A_\alpha$  non è diagonalizzabile, determinare una matrice di Jordan  $J$  ed una matrice invertibile  $H \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  tali che  $H^{-1}A_\alpha H = J$ .

*(continua)*

**Esercizio 3** Si consideri il sottospazio  $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$  di  $\mathbb{R}^4$ .

- Scrivere una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di  $U$ .
- Determinare un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  tale che  $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ . Tale  $W$  è unico?
- Scrivere una base ortonormale  $\mathcal{C}$  di  $W$ . L'insieme  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^4$ ?
- Calcolare  $W^\perp \cap U$ .

**Esercizio 4** In un fissato sistema di riferimento cartesiano  $(\mathcal{R}; x, y, z)$ , consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 4y - z = 6 \end{cases} \quad s_\beta : \begin{cases} 2x + z = 2\beta + 12 \\ 2y - \beta z = 2 \end{cases} .$$

- Determinare la distanza tra la retta  $r$  e il punto  $P = (0, 1, 1)$ .
- Stabilire per quali valori del parametro  $\beta \in \mathbb{R}$  le due rette  $r$  e  $s_\beta$  sono sghembe.
- Per  $\beta = 0$ , determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette  $r$  e  $s_0$ .
- Determinare i valori  $\bar{\beta}$  del parametro per cui  $r$  e  $s_{\bar{\beta}}$  sono perpendicolari.
- Sia  $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$  il sistema di riferimento in cui l'asse  $X$  è la retta  $r$  e l'asse  $Y$  è la retta  $s_{\bar{\beta}}$ , con  $\bar{\beta}$  uno dei valori determinati al punto d). Scrivere le equazioni dell'asse  $Z$  nel sistema di riferimento  $\mathcal{R}$ .

**Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate**

**Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E  
MECCANICA**

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 09-09-2010

TEMA n.2

**PARTE 1. Quesiti preliminari**

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare a coefficienti reali in 3 variabili non è mai un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .
2. Nello spazio affine tridimensionale due rette complanari non sono sghembe.
3. La matrice identica  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  non è diagonalizzabile.

**PARTE 2. Esercizi**

**Esercizio 1** Si considerino la varietà lineare  $S$  e, al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il sistema lineare  $\Sigma_\lambda$ :

$$S = \left( \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\rangle, \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right) \rangle; \quad \Sigma_\lambda : \begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = 1 \\ x + (2\lambda - 3)z - t = 2\lambda - 3 \\ 2x + 2y + (3\lambda - 1)z + (\lambda + 2)t = 3\lambda - 2. \end{cases}$$

- a) Scrivere un sistema lineare  $\Sigma'$  il cui insieme delle soluzioni sia  $S$ .
- b) Determinare i valori di  $\lambda \in \mathbb{R}$  per i quali  $\Sigma'$  e  $\Sigma_\lambda$  hanno soluzioni in comune.
- c) Per i valori di  $\lambda \in \mathbb{R}$  trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra  $\Sigma'$  e  $\Sigma_\lambda$ .

**Esercizio 2** Si consideri, al variare del parametro  $\beta \in \mathbb{R}$ , il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$ :

$$f_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\beta + 1)x - y - (3 + 2\beta)z \\ (\beta + 2)x - \beta y + (\beta + 1)z \\ y + (2 + \beta)z \end{pmatrix}.$$

- a) Scrivere la matrice  $A_\beta$  di  $f_\beta$  rispetto alle basi canoniche.
- b) Stabilire per quali valori del parametro  $\beta \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f_\beta$  è invertibile.
- c) Calcolare il polinomio caratteristico di  $f_\beta$  [Suggerimento: sviluppare il determinante secondo la prima colonna] e stabilire per quali  $\beta \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f_\beta$  è diagonalizzabile.
- d) Nei casi in cui  $A_\beta$  non è diagonalizzabile, determinare una matrice di Jordan  $J$  ed una matrice invertibile  $H \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  tali che  $H^{-1}A_\beta H = J$ .

*(continua)*

**Esercizio 3** Si consideri il sottospazio  $U = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$  di  $\mathbb{R}^4$ .

- Scrivere una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di  $U$ .
- Determinare un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  tale che  $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ . Tale  $W$  è unico?
- Scrivere una base ortonormale  $\mathcal{C}$  di  $W$ . L'insieme  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^4$ ?
- Calcolare  $W^\perp \cap U$ .

**Esercizio 4** In un fissato sistema di riferimento cartesiano  $(\mathcal{R}; x, y, z)$ , consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x + 4y + z = 6 \end{cases} \quad s_\alpha : \begin{cases} 2x - z = 2\alpha - 8 \\ 2y - \alpha z = 2 \end{cases}.$$

- Determinare la distanza tra la retta  $r$  e il punto  $P = (1, 0, 1)$ .
- Stabilire per quali valori del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  le due rette  $r$  e  $s_\alpha$  sono sghembe.
- Per  $\alpha = 0$ , determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette  $r$  e  $s_0$ .
- Determinare i valori  $\bar{\alpha}$  del parametro per cui  $r$  e  $s_{\bar{\alpha}}$  sono perpendicolari.
- Sia  $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$  il sistema di riferimento in cui l'asse  $X$  è la retta  $r$  e l'asse  $Y$  è la retta  $s_{\bar{\alpha}}$ , con  $\bar{\alpha}$  uno dei valori determinati al punto d). Scrivere le equazioni dell'asse  $Z$  nel sistema di riferimento  $\mathcal{R}$ .

**Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate**

**Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E  
MECCANICA**

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 09-09-2010

TEMA n.3

**PARTE 1. Quesiti preliminari**

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 3 variabili a coefficienti reali può non essere un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .
2. Nello spazio affine tridimensionale due rette sghembe possono essere complanari.

3. La matrice nulla  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  non è diagonalizzabile.

**PARTE 2. Esercizi**

**Esercizio 1** Si considerino la varietà lineare  $S$  e, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il sistema lineare  $\Sigma_\alpha$ :

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad \Sigma_\alpha : \begin{cases} x - z + t = 1 \\ x - 2y + (2\alpha + 5)z - 3t = 2\alpha + 1 \\ 2x + y + (2\alpha - 2)z + (\alpha + 4)t = 2\alpha + 4. \end{cases}$$

- a) Scrivere un sistema lineare  $\Sigma'$  il cui insieme delle soluzioni sia  $S$ .
- b) Determinare i valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  per i quali  $\Sigma'$  e  $\Sigma_\alpha$  hanno soluzioni in comune.
- c) Per i valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra  $\Sigma'$  e  $\Sigma_\alpha$ .

**Esercizio 2** Si consideri, al variare del parametro  $\gamma \in \mathbb{R}$ , il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$ :

$$f_\gamma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\gamma - 1)x - y + (2\gamma - 3)z \\ (2 - \gamma)x + \gamma y + (1 - \gamma)z \\ y + (2 - \gamma)z \end{pmatrix}.$$

- a) Scrivere la matrice  $A_\gamma$  di  $f_\gamma$  rispetto alle basi canoniche.
- b) Stabilire per quali valori del parametro  $\gamma \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f_\gamma$  è invertibile.
- c) Calcolare il polinomio caratteristico di  $f_\gamma$  [Suggerimento: sviluppare il determinante secondo la prima colonna] e stabilire per quali  $\gamma \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f_\gamma$  è diagonalizzabile.
- d) Nei casi in cui  $A_\gamma$  non è diagonalizzabile, determinare una matrice di Jordan  $J$  ed una matrice invertibile  $H \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  tali che  $H^{-1}A_\gamma H = J$ .

(continua)

**Esercizio 3** Si consideri il sottospazio  $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$  di  $\mathbb{R}^4$ .

- Scrivere una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di  $U$ .
- Determinare un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  tale che  $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ . Tale  $W$  è unico?
- Scrivere una base ortonormale  $\mathcal{C}$  di  $W$ . L'insieme  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^4$ ?
- Calcolare  $W^\perp \cap U$ .

**Esercizio 4** In un fissato sistema di riferimento cartesiano  $(\mathcal{R}; x, y, z)$ , consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 4x + 2y - z = 6 \end{cases} \quad s_\delta : \begin{cases} 2y + z = 2\delta + 12 \\ 2x - \delta z = 2 \end{cases}.$$

- Determinare la distanza tra la retta  $r$  e il punto  $P = (0, 1, 1)$ .
- Stabilire per quali valori del parametro  $\delta \in \mathbb{R}$  le due rette  $r$  e  $s_\delta$  sono sghembe.
- Per  $\delta = 0$ , determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette  $r$  e  $s_0$ .
- Determinare i valori  $\bar{\delta}$  del parametro per cui  $r$  e  $s_{\bar{\delta}}$  sono perpendicolari.
- Sia  $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$  il sistema di riferimento in cui l'asse  $X$  è la retta  $r$  e l'asse  $Y$  è la retta  $s_{\bar{\delta}}$ , con  $\bar{\delta}$  uno dei valori determinati al punto d). Scrivere le equazioni dell'asse  $Z$  nel sistema di riferimento  $\mathcal{R}$ .

**Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate**

**Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E  
MECCANICA**

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 09-09-2010

TEMA n.4

**PARTE 1. Quesiti preliminari**

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 3 variabili a coefficienti reali è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .
2. Nello spazio affine tridimensionale due rette non complanari sono sghembe.

3. La matrice identica  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  non è diagonalizzabile.

**PARTE 2. Esercizi**

**Esercizio 1** Si considerino la varietà lineare  $S$  e, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il sistema lineare  $\Sigma_\alpha$ :

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad \Sigma_\alpha : \begin{cases} x - z - t = -1 \\ x + 2y + (2\alpha + 1)z + 3t = 2\alpha - 1 \\ 3x + 4y + (3\alpha + 2)z + (\alpha + 5)t = 3\alpha - 1. \end{cases}$$

- a) Scrivere un sistema lineare  $\Sigma'$  il cui insieme delle soluzioni sia  $S$ .
- b) Determinare i valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  per i quali  $\Sigma'$  e  $\Sigma_\alpha$  hanno soluzioni in comune.
- c) Per i valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra  $\Sigma'$  e  $\Sigma_\alpha$ .

**Esercizio 2** Si consideri, al variare del parametro  $\delta \in \mathbb{R}$ , il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$ :

$$f_\delta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \delta)x - y + (1 - 2\delta)z \\ \delta x + (2 - \delta)y + (\delta - 1)z \\ y + \delta z \end{pmatrix}.$$

- a) Scrivere la matrice  $A_\delta$  di  $f_\delta$  rispetto alle basi canoniche.
- b) Stabilire per quali valori del parametro  $\delta \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f_\delta$  è invertibile.
- c) Calcolare il polinomio caratteristico di  $f_\delta$  [Suggerimento: sviluppare il determinante secondo la prima colonna] e stabilire per quali  $\delta \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f_\delta$  è diagonalizzabile.
- d) Nei casi in cui  $A_\delta$  non è diagonalizzabile, determinare una matrice di Jordan  $J$  ed una matrice invertibile  $H \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  tali che  $H^{-1}A_\delta H = J$ .

*(continua)*

**Esercizio 3** Si consideri il sottospazio  $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$  di  $\mathbb{R}^4$ .

- Scrivere una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di  $U$ .
- Determinare un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  tale che  $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ . Tale  $W$  è unico?
- Scrivere una base ortonormale  $\mathcal{C}$  di  $W$ . L'insieme  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^4$ ?
- Calcolare  $W^\perp \cap U$ .

**Esercizio 4** In un fissato sistema di riferimento cartesiano  $(\mathcal{R}; x, y, z)$ , consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x + 4y + 4z = 6 \end{cases} \quad s_\gamma : \begin{cases} 2x - y = -\gamma - 1 \\ \gamma y + 2z = \gamma \end{cases} .$$

- Determinare la distanza tra la retta  $r$  e il punto  $P = (0, 1, 1)$ .
- Stabilire per quali valori del parametro  $\gamma \in \mathbb{R}$  le due rette  $r$  e  $s_\gamma$  sono sghembe.
- Per  $\gamma = 0$ , determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette  $r$  e  $s_0$ .
- Determinare i valori  $\bar{\gamma}$  del parametro per cui  $r$  e  $s_{\bar{\gamma}}$  sono perpendicolari.
- Sia  $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$  il sistema di riferimento in cui l'asse  $X$  è la retta  $r$  e l'asse  $Y$  è la retta  $s_{\bar{\gamma}}$ , con  $\bar{\gamma}$  uno dei valori determinati al punto d). Scrivere le equazioni dell'asse  $Z$  nel sistema di riferimento  $\mathcal{R}$ .

**Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate**