LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE E TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 10-09-05
TEMA n.1

Esercizio 1. Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 è compatibile. Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + kx_3 + 2x_4 = k \\ x_1 + 6x_2 + kx_3 + 3x_4 = 2k + 1 \\ -x_1 - 3x_2 + (k-2)x_4 = 1 - k \\ kx_3 + (2-k)x_4 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & -a \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire per quali valori di a la matrice B_a è diagonalizzabile.

b) Per i valori di a trovati in a) determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di B_a.

c) Per quali valori di a, ortonormalizzando la base $\mathcal{B}$ trovata in b), si ottiene ancora una base di autovettori di B_a?

d) Esistono valori di a tali che $\det(B_a^3) = 8$?

Esercizio 3. Sia $W = \langle (1,-1,1), (1,2,-2), (5,4,-4) \rangle$.

a) Calcolare la dimensione di W e determinarne una base ortonormale.

b) Dato $U = \langle (-1,0,2) \rangle$ verificare che la somma di U e W è diretta.

c) Determinare $W^\perp$. Determinare, se possibile, un vettore v di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su W sia $(1,-1,1)$ e la cui proiezione ortogonale su $W^\perp$ sia $(0,2,2)$.

d) Determinare, se possibile, un vettore w di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su W sia $(2,1,-1)$ e la cui proiezione ortogonale su U sia $(-1,0,2)$.

Esercizio 4. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r_k, dipendente dal parametro reale k, di equazioni $r_k : \begin{cases} x + y - (k+1)z + 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ e la retta s di equazioni $s : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3 - t \\ z = -t - 2. \end{cases}$

a) Determinare, se esistono, valori di k per i quali la corrispondente retta r_k sia ortogonale alla retta s.

b) Per ciascuna delle rette r_k determinate in a) stabilire se essa è complanare ad s ed in caso affermativo scrivere un'equazione del piano corrispondente.

c) Determinare, se esistono, valori di k per i quali la corrispondente retta r_k sia parallela alla retta s.

d) Per ciascuna delle rette r_k determinate in c) calcolare la distanza tra r_k ed s.

Esercizio 5. Sia $u = (1, -1, 2)$ e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$T(v) = u \times v$$

dove $\times$ indica il prodotto vettoriale.

a) Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare nucleo e immagine di T.

c) Costruire un endomorfismo h di $\mathbb{R}^3$ tale che $\ker T$ sia l'autospazio di h relativo all'autovalore 2 e $\ker h = ImT$. Tale endomorfismo è unico? È diagonalizzabile? In caso affermativo, determinare una sua forma diagonale.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE E TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 10-09-05
TEMA n.2

Esercizio 1. Stabilire per quali valori del parametro reale h il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 è compatibile. Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + (2+h)x_3 + 2x_4 = 2+h \\ x_1 + 6x_2 + (2+h)x_3 + 3x_4 = 5+2h \\ -x_1 - 3x_2 + hx_4 = -1-h \\ (2+h)x_3 - hx_4 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare di $b \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$B_b = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -b & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire per quali valori di b la matrice B_b è diagonalizzabile.

b) Per i valori di b trovati in a) determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di B_b.

c) Per quali valori di b, ortonormalizzando la base $\mathcal{B}$ trovata in b), si ottiene ancora una base di autovettori di B_b?

d) Esistono valori di b tali che $\det(B_b^4) = 16$?

Esercizio 3. Sia $S = \langle (2,1,1), (-1,2,2), (1,1,1) \rangle$.

a) Calcolare la dimensione di S e determinarne una base ortonormale.

b) Dato $T = \langle (-2,1,3) \rangle$ verificare che la somma di S e T è diretta.

c) Determinare $S^{\perp}$. Determinare, se possibile, un vettore u di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su S sia $(-1,2,2)$ e la cui proiezione ortogonale su $S^{\perp}$ sia $(0,1,-1)$.

d) Determinare, se possibile, un vettore w di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su S sia $(-1,2,2)$ e la cui proiezione ortogonale su T sia $(-2,1,3)$.

Esercizio 4. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta s_h, dipendente dal parametro reale h, di equazioni $s_h : \begin{cases} 2x + y - (h+1)z + 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ e la retta r di equazioni $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = -\lambda - 1. \end{cases}$

a) Determinare, se esistono, valori di h per i quali la corrispondente retta s_h sia ortogonale alla retta r.

b) Per ciascuna delle rette s_h determinate in a) stabilire se essa è complanare ad r ed in caso affermativo scrivere un'equazione del piano corrispondente.

c) Determinare, se esistono, valori di h per i quali la corrispondente retta s_h sia parallela alla retta r.

d) Per ciascuna delle rette s_h determinate in c) calcolare la distanza tra s_h ed r.

Esercizio 5. Sia $u = (2, 1, -1)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(v) = 2u \times v$$

dove $\times$ indica il prodotto vettoriale.

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare nucleo e immagine di f.

c) Costruire un endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$ tale che $\ker f$ sia l'autospazio di g relativo all'autovalore 3 e $\ker g = Imf$. Tale endomorfismo è unico? È diagonalizzabile? In caso affermativo, determinare una sua forma diagonale.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE E TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 10-09-05
TEMA n.3

Esercizio 1. Stabilire per quali valori del parametro reale h il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 è compatibile. Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + (h+1)x_3 + 2x_4 = h+1 \\ 6x_1 + x_2 + (h+1)x_3 + 3x_4 = 2h+3 \\ -3x_1 - x_2 + (h-1)x_4 = -h \\ (h+1)x_3 + (1-h)x_4 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ k & -2 & k \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire per quali valori di k la matrice B_k è diagonalizzabile.

b) Per i valori di k trovati in a) determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di B_k.

c) Per quali valori di k, ortonormalizzando la base $\mathcal{B}$ trovata in b), si ottiene ancora una base di autovettori di B_k?

d) Esistono valori di k tali che $\det(B_k^3) = -8$?

Esercizio 3. Sia $V = \langle (2,-1,0), (1,1,-2), (1,-5,6) \rangle$.

a) Calcolare la dimensione di V e determinarne una base ortonormale.

b) Dato $W = \langle (1,1,1) \rangle$ verificare che la somma di V e W è diretta.

c) Determinare $V^\perp$. Determinare, se possibile, un vettore u di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su V sia $(2,-1,0)$ e la cui proiezione ortogonale su $V^\perp$ sia $(2,4,3)$.

d) Determinare, se possibile, un vettore v di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su V sia $(2,-1,0)$ e la cui proiezione ortogonale su W sia $(1,1,1)$.

Esercizio 4. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r_h, dipendente dal parametro reale h, di equazioni $r_h : \begin{cases} x - hy + z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ e la retta s di equazioni $s : \begin{cases} x = -5 - \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda. \end{cases}$

a) Determinare, se esistono, valori di h per i quali la corrispondente retta r_h sia ortogonale alla retta s.

b) Per ciascuna delle rette r_h determinate in a) stabilire se essa è complanare ad s ed in caso affermativo scrivere un'equazione del piano corrispondente.

c) Determinare, se esistono, valori di h per i quali la corrispondente retta r_h sia parallela alla retta s.

d) Per ciascuna delle rette r_h determinate in c) calcolare la distanza tra r_h ed s.

Esercizio 5. Sia $u = (2, -3, 4)$ e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$T(v) = -u \times v$$

dove $\times$ indica il prodotto vettoriale.

a) Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare nucleo e immagine di T.

c) Costruire un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $\ker T$ sia l'autospazio di f relativo all'autovalore -1 e $\ker f = ImT$. Tale endomorfismo è unico? È diagonalizzabile? In caso affermativo, determinare una sua forma diagonale.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE E TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 10-09-05
TEMA n.4

Esercizio 1. Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 è compatibile. Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + (k-1)x_4 = k \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 + (k-1)x_4 = 2k-1 \\ -3x_1 - x_2 + (k-3)x_3 = 2-k \\ (1-k)x_3 - (2k-1)x_4 = -2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} -1 & a & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire per quali valori di a la matrice B_a è diagonalizzabile.

b) Per i valori di a trovati in a) determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di B_a.

c) Per quali valori di a, ortonormalizzando la base $\mathcal{B}$ trovata in b), si ottiene ancora una base di autovettori di B_a?

d) Esistono valori di a tali che $\det(B_a^3) = -1$?

Esercizio 3. Sia $S = \langle (1,-1,0), (3,-1,-2), (1,1,-2) \rangle$.

a) Calcolare la dimensione di S e determinarne una base ortonormale.

b) Dato $T = \langle (2,-1,1) \rangle$ verificare che la somma di S e T è diretta.

c) Determinare $S^\perp$. Determinare, se possibile, un vettore u di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su S sia $(1,1,-2)$ e la cui proiezione ortogonale su $S^\perp$ sia $(2,2,2)$.

d) Determinare, se possibile, un vettore v di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su S sia $(1,1,-2)$ e la cui proiezione ortogonale su T sia $(2,-1,1)$.

Esercizio 4. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r_λ, dipendente dal parametro reale λ, di equazioni

$r_\lambda : \begin{cases} x - \lambda y + z + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e la retta s di equazioni $s : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -3 + t \\ z = 3 - t. \end{cases}$

a) Determinare, se esistono, valori di λ per i quali la corrispondente retta r_λ sia ortogonale alla retta s.

b) Per ciascuna delle rette r_λ determinate in a) stabilire se essa è complanare ad s ed in caso affermativo scrivere un'equazione del piano corrispondente.

c) Determinare, se esistono, valori di λ per i quali la corrispondente retta r_λ sia parallela alla retta s.

d) Per ciascuna delle rette r_λ determinate in c) calcolare la distanza tra r_λ ed s.

Esercizio 5. Sia $u = (1, -3, 1)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(v) = -2u \times v$$

dove $\times$ indica il prodotto vettoriale.

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare nucleo e immagine di f.

c) Costruire un endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$ tale che $\ker f$ sia l'autospazio di g relativo all'autovalore -2 e $\ker g = Im f$. Tale endomorfismo è unico? È diagonalizzabile? In caso affermativo, determinare una sua forma diagonale.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.