LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

Padova 10-12-07

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

- L'applicazione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$, è lineare.
- L'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 1 \end{cases}$, nelle incognite x, y, z , è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
- Il vettore $(1, 0)$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ soddisfacente le seguenti condizioni:

$$f(1, 2, -1) = (1, 0, 1, 0); \quad f(0, 4, 1) = (1, 1, 3, 2); \quad f(1, -1, -2) = (1, 0, 1, 1); \quad f(2, 5, -2) = (3, 1, 5, 3).$$

- Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
- Determinare nucleo ed immagine di f . L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?
- Determinare, se esistono, i vettori della varietà lineare $(0, 0, 1, 1) + \langle (1, 0, 2, 1) \rangle$ che appartengono ad $\text{Im } f$. Calcolare la controimmagine di tali vettori.
- Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare nucleo ed immagine dell'applicazione lineare $g_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $g_k(x, y, z, t) = (x - z + t, y, (k + 1)x - kt)$.
- Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione $g_k \circ f$ è un isomorfismo?

Esercizio 2 Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

- Il sottospazio $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ contiene autovettori di A_α ?
- Determinare gli autovalori e gli autospazi di A_α .
- Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.
- Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali gli autospazi siano tra loro ortogonali?
- Per $\alpha = 0$, determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia triangolare superiore.

Voltare pagina

Esercizio 3 Si considerino i sottospazi $U = \langle (1, 0, 2), (1, 2, 0) \rangle$ e $W = \langle (1, -1, 1), (0, 1, 0) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

- Determinare una base per gli spazi $U \cap W$ e $U + W$. La somma $U + W$ è diretta?
- Esiste un sottospazio T tale che $T \oplus U = T \oplus W = \mathbb{R}^3$? In caso affermativo, determinarne uno. È unico?
- Calcolare, se esiste un vettore $\mathbf{w}_0 \in W$ la cui proiezione ortogonale su U sia $p_U(\mathbf{w}_0) = (1, 0, 2)$.
- Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^3$ di dimensione 1 in modo tale che, se p_S è la proiezione ortogonale su S , si abbia $p_S(U) \subseteq W$ e $p_S(W) \subseteq U$.
- Quanti sono i possibili sottospazi S che soddisfano la condizione precedente?

Esercizio 4 In un fissato sistema di riferimento ortonormale $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo la retta

$$r : \begin{cases} 2x + z = 2 \\ 3y - z = 3 \end{cases} .$$

- Scrivere equazioni cartesiane di tutte le rette dello spazio passanti per $P = (7, 4, 2)$ ed ortogonali ad r .
- Determinare la posizione reciproca di tali rette con la retta r .
- Scrivere le equazioni della retta r' passante per P e parallela ad r .
- Determinare i piani contenenti r' che distano $\frac{7}{\sqrt{2}}$ da r .
- Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento ortonormale che ha orientamento opposto a quello di $\mathcal{R}$ ed in cui l'origine è il punto $Q_0(1, 1, 0)$, l'asse X è la retta r , orientata secondo le x crescenti ed il punto P ha coordinate $(0, 0, 7)$. Scrivere le equazioni di passaggio tra i due riferimenti.
- Scelto a piacere uno dei piani trovati al punto d), scriverne le equazioni nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

Padova 10-12-07

TEMA n.2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

- L'applicazione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, è lineare.
- Il vettore $(0, 1)$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- L'equazione $2x + y - z = 1$ descrive in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ un piano parallelo al vettore $(2, 1, -1)$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ soddisfacente le seguenti condizioni:

$$f(1, 2, 3) = (1, 0, 1, 0); \quad f(2, 1, -1) = (1, 1, 0, 2); \quad f(3, -1, -7) = (1, 0, 2, 0); \quad f(6, 2, -5) = (3, 1, 3, 2).$$

- Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
- Determinare nucleo ed immagine di f . L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?
- Determinare, se esistono, i vettori della varietà lineare $(0, 0, 1, 1) + \langle (1, 0, 0, -1) \rangle$ che appartengono ad $\text{Im } f$. Calcolare la controimmagine di tali vettori.
- Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare nucleo ed immagine dell'applicazione lineare $g_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $g_k(x, y, z, t) = (x - z + t, y, (k - 1)x + kt)$.
- Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione $g_k \circ f$ è un isomorfismo?

Esercizio 2 Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 2 & -2 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

- Il sottospazio $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ contiene autovettori di A_α ?
- Determinare gli autovalori e gli autospazi di A_α .
- Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.
- Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali gli autospazi siano tra loro ortogonali?
- Per $\alpha = 0$, determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia triangolare superiore.

Voltare pagina

Esercizio 3 Si considerino i sottospazi $U = \langle (2, 0, 1), (0, 2, -1) \rangle$ e $W = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 0) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

- Determinare una base per gli spazi $U \cap W$ e $U + W$. La somma $U + W$ è diretta?
- Esiste un sottospazio T tale che $T \oplus U = T \oplus W = \mathbb{R}^3$? In caso affermativo, determinarne uno. È unico?
- Calcolare, se esiste un vettore $\mathbf{w}_0 \in W$ la cui proiezione ortogonale su U sia $p_U(\mathbf{w}_0) = (2, 0, 1)$.
- Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^3$ di dimensione 1 in modo tale che, se p_S è la proiezione ortogonale su S , si abbia $p_S(U) \subseteq W$ e $p_S(W) \subseteq U$.
- Quanti sono i possibili sottospazi S che soddisfano la condizione precedente?

Esercizio 4 In un fissato sistema di riferimento ortonormale $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo la retta

$$r : \begin{cases} 3x + y = 4 \\ y + 2z = 1 \end{cases} .$$

- Scrivere equazioni cartesiane di tutte le rette dello spazio passanti per $P = (7, 4, 2)$ ed ortogonali ad r .
- Determinare la posizione reciproca di tali rette con la retta r .
- Scrivere le equazioni della retta r' passante per P e parallela ad r .
- Determinare i piani contenenti r' che distano $\frac{7}{\sqrt{2}}$ da r .
- Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento ortonormale che ha orientamento opposto a quello di $\mathcal{R}$ ed in cui l'origine è il punto $Q_0(1, 1, 0)$, l'asse X è la retta r , orientata secondo le x crescenti ed il punto P ha coordinate $(0, 0, 7)$. Scrivere le equazioni di passaggio tra i due riferimenti.
- Scelto a piacere uno dei piani trovati al punto d), scriverne le equazioni nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

Padova 10-12-07

TEMA n.3

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

- L'applicazione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$, è lineare.
- L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare nelle incognite x, y, z , di rango uno, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2.
- Il vettore $(-1, 0)$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ soddisfacente le seguenti condizioni:

$$f(1, 0, 1) = (1, 0, 1, 0); \quad f(2, 4, -1) = (1, 2, 3, 2); \quad f(-1, 1, -2) = (1, 0, 1, 1); \quad f(2, 5, -2) = (3, 2, 5, 3).$$

- Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
- Determinare nucleo ed immagine di f . L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?
- Determinare, se esistono, i vettori della varietà lineare $(2, 2, 2, 2) + \langle (1, 0, -1, 0) \rangle$ che appartengono ad $\text{Im } f$. Calcolare la controimmagine di tali vettori.
- Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare nucleo ed immagine dell'applicazione lineare $g_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $g_k(x, y, z, t) = (x + y - z, y - t, kx - z)$.
- Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione $g_k \circ f$ è un isomorfismo?

Esercizio 2 Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 2 & 2 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Il sottospazio $\langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ contiene autovettori di A_α ?
- Determinare gli autovalori e gli autospazi di A_α .
- Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.
- Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali gli autospazi siano tra loro ortogonali?
- Per $\alpha = 0$, determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia triangolare superiore.

Voltare pagina

Esercizio 3 Si considerino i sottospazi $U = \langle (2, -1, 0), (0, 1, 2) \rangle$ e $W = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 0) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

- Determinare una base per gli spazi $U \cap W$ e $U + W$. La somma $U + W$ è diretta?
- Esiste un sottospazio T tale che $T \oplus U = T \oplus W = \mathbb{R}^3$? In caso affermativo, determinarne uno. È unico?
- Calcolare, se esiste un vettore $\mathbf{w}_0 \in W$ la cui proiezione ortogonale su U sia $p_U(\mathbf{w}_0) = (2, -1, 0)$.
- Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^3$ di dimensione 1 in modo tale che, se p_S è la proiezione ortogonale su S , si abbia $p_S(U) \subseteq W$ e $p_S(W) \subseteq U$.
- Quanti sono i possibili sottospazi S che soddisfano la condizione precedente?

Esercizio 4 In un fissato sistema di riferimento ortonormale $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo la retta

$$r : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ y - 2z = 1 \end{cases} .$$

- Scrivere equazioni cartesiane di tutte le rette dello spazio passanti per $P = (7, -2, 2)$ ed ortogonali ad r .
- Determinare la posizione reciproca di tali rette con la retta r .
- Scrivere le equazioni della retta r' passante per P e parallela ad r .
- Determinare i piani contenenti r' che distano $\frac{7}{\sqrt{2}}$ da r .
- Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento ortonormale che ha orientamento opposto a quello di $\mathcal{R}$ ed in cui l'origine è il punto $Q_0(1, 1, 0)$, l'asse X è la retta r , orientata secondo le x crescenti ed il punto P ha coordinate $(0, 0, 7)$. Scrivere le equazioni di passaggio tra i due riferimenti.
- Scelto a piacere uno dei piani trovati al punto d), scriverne le equazioni nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

Padova 10-12-07

TEMA n.4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

- L'applicazione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x$, è lineare.
- L'equazione $x - 2y = 0$ in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ descrive una retta parallela al vettore $(1, -2)$.
- Il vettore $(0, 1)$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ soddisfacente le seguenti condizioni:

$$f(1, 2, 1) = (1, 0, 1, 0); \quad f(2, 1, 0) = (1, 1, 3, -1); \quad f(3, -1, -2) = (1, 0, 1, 1); \quad f(6, 2, -1) = (3, 1, 5, 0).$$

- Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
- Determinare nucleo ed immagine di f . L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?
- Determinare, se esistono, i vettori della varietà lineare $(1, 1, 5, 1) + \langle (0, 0, 1, 1) \rangle$ che appartengono ad $\text{Im } f$. Calcolare la controimmagine di tali vettori.
- Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare nucleo ed immagine dell'applicazione lineare $g_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $g_k(x, y, z, t) = (x - y, y + t, kx + y - z - t)$.
- Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione $g_k \circ f$ è un isomorfismo?

Esercizio 2 Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Il sottospazio $\langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ contiene autovettori di A_α ?
- Determinare gli autovalori e gli autospazi di A_α .
- Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.
- Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali gli autospazi siano tra loro ortogonali?
- Per $\alpha = 0$, determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia triangolare superiore.

Voltare pagina

Esercizio 3 Si considerino i sottospazi $U = \langle (2, 0, -1), (0, 2, 1) \rangle$ e $W = \langle (1, 1, 1), (0, 0, 1) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

- Determinare una base per gli spazi $U \cap W$ e $U + W$. La somma $U + W$ è diretta?
- Esiste un sottospazio T tale che $T \oplus U = T \oplus W = \mathbb{R}^3$? In caso affermativo, determinarne uno. È unico?
- Calcolare, se esiste un vettore $\mathbf{w}_0 \in W$ la cui proiezione ortogonale su U sia $p_U(\mathbf{w}_0) = (2, 0, -1)$.
- Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^3$ di dimensione 1 in modo tale che, se p_S è la proiezione ortogonale su S , si abbia $p_S(U) \subseteq W$ e $p_S(W) \subseteq U$.
- Quanti sono i possibili sottospazi S che soddisfano la condizione precedente?

Esercizio 4 In un fissato sistema di riferimento ortonormale $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo la retta

$$r : \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 3y + z = 3 \end{cases} .$$

- Scrivere equazioni cartesiane di tutte le rette dello spazio passanti per $P = (7, -2, 2)$ ed ortogonali ad r .
- Determinare la posizione reciproca di tali rette con la retta r .
- Scrivere le equazioni della retta r' passante per P e parallela ad r .
- Determinare i piani contenenti r' che distano $\frac{7}{\sqrt{2}}$ da r .
- Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento ortonormale che ha orientamento opposto a quello di $\mathcal{R}$ ed in cui l'origine è il punto $Q_0(1, 1, 0)$, l'asse X è la retta r , orientata secondo le x crescenti ed il punto P ha coordinate $(0, 0, 7)$. Scrivere le equazioni di passaggio tra i due riferimenti.
- Scelto a piacere uno dei piani trovati al punto d), scriverne le equazioni nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate