CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, CHIMICA-MATERIALI, AMBIENTE E TERRITORIO

Padova 14-09-06

Esercizio 1. Sia $S = (1,0,1) + \langle (2,-1,1), (0,1,3) \rangle$ l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare Σ.

a) Stabilire se Σ può essere omogeneo.

b) Stabilire se esistono valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che Σ sia equivalente al sistema lineare

$$\Sigma'_a : \begin{cases} x - 2z = -1 \\ 2x - 4z = -a \end{cases}$$

c) Indicato con T_a l'insieme delle soluzioni del sistema lineare Σ'_a, determinare $S \cap T_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

d) Stabilire se esistono valori di a tali che $S \cap T_a$ sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

e) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ contenente $S \cap T_a$.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, 2a + c - d).$$

a) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ed alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

b) Determinare una base di $\ker f$ e completare la base trovata in una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Stabilire se f è suriettiva.

d) Determinare la controimmagine del vettore $(1,1)$ mediante f.

e) Determinare, se possibile, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$. Calcolare $g(3,-1)$.

Esercizio 3. Sia $V = \langle (1,1,2), (1,0,1) \rangle$.

a) Determinare $V^\perp$.

b) Determinare, se possibile, una matrice simmetrica A non invertibile che abbia V come autospazio relativo all'autovalore -1.

c) Determinare una base ortonormale di autovettori di A.

d) Stabilire se esistono valori del parametro reale k tali che A sia simile alla matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(*continua*)

Esercizio 4. Assegnati il piano π di equazione $x - 2y + z = 1$ e la retta s di equazioni $\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$,

a) determinare tutte le rette parallele al piano π ed ortogonali alla retta s;

b) tra le rette individuate in a), determinare quelle aventi distanza $\frac{\sqrt{6}}{2}$ dal piano π ed incidenti la retta s;

c) scelta una delle rette individuate in b), determinare la sua distanza dalla retta t di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.