

Università degli Studi di Padova

Prima prova parziale. 14 gennaio 2002

ESAME DI MATEMATICA II

A.A.01/02

Bruno Chiarellotto - Nicola Rodinò - Nicoletta Cantarini

TEMA 1 Lo studente risolva successivamente gli esercizi 1 e 2 della prima parte. SOLTANTO dopo aver terminato la prima parte, risolva il maggior numero di quesiti della seconda parte. I compiti non contenenti la risoluzione degli esercizi 1 e 2 non verranno corretti.

PRIMA PARTE

Ex.1 Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3 + 4x_4, x_1 + x_3 - 2x_4, -x_4).$$

- i) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^4$ e alla base canonica $\mathcal{C}'$ di $\mathbf{R}^3$.
- ii) Determinare $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$. f è iniettiva? È suriettiva?
- iii) Determinare un sottospazio vettoriale S di $\mathbf{R}^4$ tale che $\text{Ker } f \oplus S = \mathbf{R}^4$.
- iv) Sia $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ e sia $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Determinare la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$, la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{C}'$ alla base $\mathcal{B}'$ e, infine, la matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Ex.2 Studiare il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale h :

$$\begin{cases} hx + y + z = 1 \\ x + hy + z = 1 \\ x + y + hz = 1 \end{cases}.$$

SECONDA PARTE

1) Esiste una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ tale che sia $\text{Ker } f = \langle (0, 1, 0), (0, 2, 1) \rangle$ e $\text{Im } f = \langle (1, 1, 1, 2), (0, 1, 1, 1) \rangle$?

2) Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\{u, v, w\}$ una sua base. Stabilire se l'insieme $\{u + v + w, u - v - 3w, u + w\}$ è una base di V .

3) Si determini un isomorfismo f tra lo spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^{\leq 3}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado minore o uguale a 3 e lo spazio vettoriale reale $M_2(\mathbf{R})$ delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate reali. Scelte, poi, una base del dominio ed una base del codominio di f , si scriva la matrice associata ad f rispetto a tali basi.

4) Mostrare che, per ogni applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, esiste una applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ non nulla tale che $g \circ f$ sia l'applicazione lineare nulla di $\mathbf{R}^2$.

Attenzione: ogni risposta deve essere opportunamente giustificata. Non è consentito utilizzare appunti né libri.