LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

Padova 15-12-2006

TEMA n.1

Esercizio 1 Si consideri la funzione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita da $f_a(X) = AX$ dove

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & a & a \end{pmatrix}.$$

a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_a risulta suriettiva?

b) Si calcoli la controimmagine di $(1, 2, a)$.

c) Sia $U = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$. Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha $\dim f_a(U) = \dim U$?

d) Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 0)$ sull'immagine di f_0.

e) Nei casi in cui $f_a^{-1}(1, 2, a) = \emptyset$, determinare un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $f_a(\mathbf{v})$ abbia distanza minima da $(1, 2, a)$.

Esercizio 2 In $M_3(\mathbb{R})$ siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Per ciascuna di queste matrici, determinare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

b) Per ciascuna di queste matrici, determinare, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

c) Trovare, se esiste, una matrice H tale che $H^{-1}AH = C$ oppure $H^{-1}BH = C$.

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si considerino le rette

$$r_a : \begin{cases} x = 1 + a + 2t \\ y = -1 - 3at \\ z = 1 + a + 6t \end{cases} \quad \text{e} \quad s_a : \begin{cases} x = 1 + 2at' \\ y = -1 - a - 3t' \\ z = 1 + 6at' \end{cases}.$$

a) Si dica per quali valori del parametro reale a sono complanari.

b) Nel caso in cui sono parallele, si determini un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

c) Determinare, se esiste, una retta ℓ che interseca le coppie di rette $\{r_\alpha, s_\alpha\}$ ed $\{r_\beta, s_\beta\}$ per due valori $a = \alpha$ ed $a = \beta$ del parametro.

d) Sia $\mathcal{R}'$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r_0 e l'asse Y è la retta s_0 e che ha lo stesso orientamento di $\mathcal{R}$. Scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}'$ ad $\mathcal{R}$.

Esercizio 4 Si semplifichi il numero complesso $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{\sqrt{2}(1+i)^{17}} \in \mathbb{C}$.

a) Si scriva una equazione $x^2 + ax + b = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$, soddisfatta da z.

b) Scrivere, se esiste, una matrice simmetrica $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ che abbia z come autovalore.

c) A è la matrice di una isometria?

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

Padova 15-12-2006

TEMA n.2

Esercizio 1 Si consideri la funzione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita da $f_a(X) = AX$ dove

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & 3-a \end{pmatrix}.$$

a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_a risulta suriettiva?

b) Si calcoli la controimmagine di $(1, 2, a)$.

c) Sia $U = \langle (1, 0, 1), (3, -1, 0) \rangle$. Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha $\dim f_a(U) = \dim U$?

d) Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 3)$ sull'immagine di f_3.

e) Nei casi in cui $f_a^{-1}(1, 2, a) = \varnothing$, determinare un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $f_a(\mathbf{v})$ abbia distanza minima da $(1, 2, a)$.

Esercizio 2 In $M_3(\mathbb{R})$ siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Per ciascuna di queste matrici, determinare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

b) Per ciascuna di queste matrici, determinare, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

c) Trovare, se esiste, una matrice H tale che $H^{-1}AH = C$ oppure $H^{-1}BH = C$.

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si considerino le rette

$$r_a : \begin{cases} x = 1 - 3at \\ y = a + 1 + 2t \\ z = a + 1 + 6t \end{cases} \quad \text{e} \quad s_a : \begin{cases} x = 1 - a + 3t' \\ y = 1 - 2at' \\ z = 1 - 6at' \end{cases}.$$

a) Si dica per quali valori del parametro reale a sono complanari.

b) Nel caso in cui sono parallele, si determini un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

c) Determinare, se esiste, una retta ℓ che interseca le coppie di rette $\{r_\alpha, s_\alpha\}$ ed $\{r_\beta, s_\beta\}$ per due valori $a = \alpha$ ed $a = \beta$ del parametro.

d) Sia $\mathcal{R}'$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r_0 e l'asse Y è la retta s_0 e che ha lo stesso orientamento di $\mathcal{R}$. Scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}'$ ad $\mathcal{R}$.

Esercizio 4 Si semplifichi il numero complesso $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^7}{2(1+i)^{12}} \in \mathbb{C}$.

a) Si scriva una equazione $x^2 + ax + b = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$, soddisfatta da z.

b) Scrivere, se esiste, una matrice simmetrica $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ che abbia z come autovalore.

c) A è la matrice di una isometria?

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Matematica 2
Padova 15-12-2006
TEMA n.3

Esercizio 1 Si consideri la funzione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita da $f_a(X) = AX$ dove

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & a \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_a risulta suriettiva?

b) Si calcoli la controimmagine di $(1, 0, a)$.

c) Sia $U = \langle(1, 1, 2), (1, 1, 0)\rangle$. Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha $\dim f_a(U) = \dim U$?

d) Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 0, 1)$ sull'immagine di f_1.

e) Nei casi in cui $f_a^{-1}(1, 0, a) = \varnothing$, determinare un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $f_a(\mathbf{v})$ abbia distanza minima da $(1, 0, a)$.

Esercizio 2 In $M_3(\mathbb{R})$ siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Per ciascuna di queste matrici, determinare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

b) Per ciascuna di queste matrici, determinare, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

c) Trovare, se esiste, una matrice H tale che $H^{-1}AH = C$ oppure $H^{-1}BH = C$.

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si considerino le rette

$$r_a : \begin{cases} x = 1 + a + t \\ y = -1 - at \\ z = 1 + a + 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad s_a : \begin{cases} x = 1 + at' \\ y = -1 - a - t' \\ z = 1 + 2at' \end{cases}.$$

a) Si dica per quali valori del parametro reale a sono complanari.

b) Nel caso in cui sono parallele, si determini un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

c) Determinare, se esiste, una retta ℓ che interseca le coppie di rette $\{r_\alpha, s_\alpha\}$ ed $\{r_\beta, s_\beta\}$ per due valori $a = \alpha$ ed $a = \beta$ del parametro.

d) Sia $\mathcal{R}'$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r_0 e l'asse Y è la retta s_0 e che ha lo stesso orientamento di $\mathcal{R}$. Scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}'$ ad $\mathcal{R}$.

Esercizio 4 Si semplifichi il numero complesso $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^9}{\sqrt{2}(1+i)^{17}} \in \mathbb{C}$.

a) Si scriva una equazione $x^2 + ax + b = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$, soddisfatta da z.

b) Scrivere, se esiste, una matrice simmetrica $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ che abbia z come autovalore.

c) A è la matrice di una isometria?

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

Padova 15-12-2006

TEMA n.4

Esercizio 1 Si consideri la funzione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita da $f_a(X) = AX$ dove

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & -a \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_a risulta suriettiva?

b) Si calcoli la controimmagine di $(1, 2, 2a + 2)$.

c) Sia $U = \langle(1, -1, -1), (1, 1, 1)\rangle$. Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha $\dim f_a(U) = \dim U$?

d) Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 4)$ sull'immagine di f_1.

e) Nei casi in cui $f_a^{-1}(1, 2, 2a + 2) = \varnothing$, determinare un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $f_a(\mathbf{v})$ abbia distanza minima da $(1, 2, 2a + 2)$.

Esercizio 2 In $M_3(\mathbb{R})$ siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Per ciascuna di queste matrici, determinare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

b) Per ciascuna di queste matrici, determinare, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

c) Trovare, se esiste, una matrice H tale che $H^{-1}AH = C$ oppure $H^{-1}BH = C$.

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si considerino le rette

$$r_a : \begin{cases} x = 1 - at \\ y = a + 1 + t \\ z = a + 1 + 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad s_a : \begin{cases} x = 1 - a + t' \\ y = 1 - at' \\ z = 1 - 2at' \end{cases}.$$

a) Si dica per quali valori del parametro reale a sono complanari.

b) Nel caso in cui sono parallele, si determini un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

c) Determinare, se esiste, una retta ℓ che interseca le coppie di rette $\{r_\alpha, s_\alpha\}$ ed $\{r_\beta, s_\beta\}$ per due valori $a = \alpha$ ed $a = \beta$ del parametro.

d) Sia $\mathcal{R}'$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r_0 e l'asse Y è la retta s_0 e che ha lo stesso orientamento di $\mathcal{R}$. Scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}'$ ad $\mathcal{R}$.

Esercizio 4 Si semplifichi il numero complesso $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^7}{2(1+i)^{12}} \in \mathbb{C}$.

a) Si scriva una equazione $x^2 + ax + b = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$, soddisfatta da z.

b) Scrivere, se esiste, una matrice simmetrica $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ che abbia z come autovalore.

c) A è la matrice di una isometria?

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate