CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
Padova 16-06-09
TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Siano dati due vettori non nulli $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ di uno spazio vettoriale V. La somma dei due sottospazi $<\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2>$ e $<\mathbf{v}_1>$ è diretta, cioè vale $<\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2> \oplus <\mathbf{v}_1>$.

b) Ogni endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un isomorfismo.

c) Date due rette nello spazio $\mathbb{A}^3$, esiste sempre almeno una retta ortogonale ed incidente entrambe.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Siano dati il sottospazio $W = <(1,1,1,1), (1,1,0,0)>$ di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori $\mathbf{v}_1 = (2,2,3,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,-1,0,1)$.

a) Si dicano quali tra i vettori $\mathbf{v}_i$ con $i \in \{1,2,3\}$ verificano

$$\dim(W + <\mathbf{v}_i>) = 2.$$

b) Si dicano quali tra i tre vettori sono in somma diretta con W, cioè verificano

$$W \oplus <\mathbf{v}_j> .$$

c) Determinare base e dimensione di $(W + <\mathbf{v}_1>) \cap (W + <\mathbf{v}_2>)$.

d) Determinare base e dimensione di $(W + <\mathbf{v}_2>) + (W + <\mathbf{v}_3>)$.

Esercizio 2.

a) Determinare un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, scrivendo esplicitamente $L(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tale che $\text{Ker}\,(L) = <(1,1,1)>$ e $\text{Im}\,(L) = <(1,0,0),(0,0,1)>$.

b) Si calcoli la matrice $M(L; \mathcal{B}, \mathcal{E})$ di L rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,0,0),(0,0,1)\}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E}$ del codominio.

c) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno con autovalori: $0, 1$ e 512. È unico?

d) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno diagonalizzabile con autovalori: 0 e 1. È unico?

e) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno NON diagonalizzabile con autovalori: 0 e 1. È unico?

Esercizio 3. Sia $p_U : \mathbb{R}^3 \to U$ la proiezione ortogonale sul sottospazio

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}.$$

a) Determinare le immagini $p_U(T_1)$ e $p_U(T_2)$ delle seguenti varietà lineari

$$T_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad T_2 = (0, 2, -1) + < (-1, 1, 1) > .$$

b) Si considerino le varietà lineari

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad U' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 3\}.$$

Si osservi che $S \subset U$. Determinare una varietà lineare $S' \subseteq U'$ la cui proiezione ortogonale su U sia S, cioé $p_U(S') = S$.

[Suggerimento: può essere utile tradurre il problema in termini geometrici.]

c) Calcolare la distanza tra le varietà lineari S e S'.

Esercizio 4. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare gli autovalori reali e complessi della matrice A

b) Dimostrare che A è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

c) Scrivere una matrice H invertibile e una matrice D diagonale a coefficienti complessi tale che $H^{-1}AH = D$

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
Padova 16-06-09
TEMA n.2

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Siano dati tre vettori non nulli $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ di uno spazio vettoriale V, con $\mathbf{v}_3 \notin < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$ La somma dei due sottospazi $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$ e $< \mathbf{v}_3 >$ è diretta, cioè vale $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \oplus < \mathbf{v}_3 >$.

b) $\lambda = 0$ può essere autovalore di un endomorfismo.

c) Se la distanza tra due rette nello spazio $\mathbb{A}^3$ è $d = d(r_1, r_2)$, allora per ogni punto $P_1 \in r_1$ si può sempre trovare un punto $P_2 \in r_2$ tale che $d(P_1, P_2) = d$.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Siano dati il sottospazio $W =< (1,1,1,1), (0,0,1,1) >$ di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori $\mathbf{v}_1 = (0,1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (2,2,3,3)$, $\mathbf{v}_3 = (1,-1,0,1)$.

a) Si dicano quali tra i vettori $\mathbf{v}_i$ con $i \in \{1,2,3\}$ verificano

$$\dim(W + < \mathbf{v}_i >) = 2.$$

b) Si dicano quali tra i tre vettori sono in somma diretta con W, cioè verificano

$$W \oplus < \mathbf{v}_j > .$$

c) Determinare base e dimensione di $(W + < \mathbf{v}_1 >) \cap (W + < \mathbf{v}_2 >)$.

d) Determinare base e dimensione di $(W + < \mathbf{v}_1 >) + (W + < \mathbf{v}_3 >)$.

Esercizio 2.

a) Determinare un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, scrivendo esplicitamente $L(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tale che $\mathrm{Ker}\,(L) =< (1,-1,1) >$ e $\mathrm{Im}\,(L) =< (1,0,0), (0,1,0) >$.

b) Si calcoli la matrice $M(L; \mathcal{B}, \mathcal{E})$ di L rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,-1,1), (1,0,0), (0,1,0)\}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E}$ del codominio.

c) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno con autovalori: $0, 1$ e 512. È unico?

d) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno diagonalizzabile con autovalori: 0 e 1. È unico?

e) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno NON diagonalizzabile con autovalori: 0 e 1. È unico?

Esercizio 3. Sia $p_U : \mathbb{R}^3 \to U$ la proiezione ortogonale sul sottospazio

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

a) Determinare le immagini $p_U(T_1)$ e $p_U(T_2)$ delle seguenti varietà lineari

$$T_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad T_2 = (0, 2, -1) + < (1, 1, 1) > .$$

b) Si considerino le varietà lineari

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad U' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 3\}.$$

Si osservi che $S \subset U$. Determinare una varietà lineare $S' \subseteq U'$ la cui proiezione ortogonale su U sia S, cioé $p_U(S') = S$.

[Suggerimento: può essere utile tradurre il problema in termini geometrici.]

c) Calcolare la distanza tra le varietà lineari S e S'.

Esercizio 4. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare gli autovalori reali e complessi della matrice A

b) Dimostrare che A è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

c) Scrivere una matrice H invertibile e una matrice D diagonale a coefficienti complessi tale che $H^{-1}AH = D$

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
Padova 16-06-09
TEMA n.3

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Siano dati due vettori non nulli $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ di uno spazio vettoriale V. Se la somma dei due sottospazi $< \mathbf{v}_1 >$ e $< \mathbf{v}_2 >$ è diretta, cioè vale $< \mathbf{v}_1 > \oplus < \mathbf{v}_2 >$, allora $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti.

b) Ogni isomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile.

c) Date due rette nello spazio $\mathbb{A}^3$, esiste sempre un'unica una retta ortogonale ed incidente entrambe.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Siano dati il sottospazio $W =< (1,0,1,0),(0,1,0,1) >$ di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori $\mathbf{v}_1 = (2,3,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,-1,0,1)$.

a) Si dicano quali tra i vettori $\mathbf{v}_i$ con $i \in \{1,2,3\}$ verificano

$$\dim(W+ < \mathbf{v}_i >) = 2.$$

b) Si dicano quali tra i tre vettori sono in somma diretta con W, cioè verificano

$$W \oplus < \mathbf{v}_j > .$$

c) Determinare base e dimensione di $(W+ < \mathbf{v}_1 >) \cap (W+ < \mathbf{v}_2 >)$.

d) Determinare base e dimensione di $(W+ < \mathbf{v}_2 >) + (W+ < \mathbf{v}_3 >)$.

Esercizio 2.

a) Determinare un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, scrivendo esplicitamente $L(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tale che $\operatorname{Ker}(L) =< (1,1,-1) >$ e $\operatorname{Im}(L) =< (1,0,0),(0,0,1) >$.

b) Si calcoli la matrice $M(L; \mathcal{B}, \mathcal{E})$ di L rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,-1),(1,0,0),(0,0,1)\}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E}$ del codominio.

c) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno con autovalori: $0, 1$ e 512. È unico?

d) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno diagonalizzabile con autovalori: 0 e 1. È unico?

e) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno NON diagonalizzabile con autovalori: 0 e 1. È unico?

Esercizio 3. Sia $p_U : \mathbb{R}^3 \to U$ la proiezione ortogonale sul sottospazio

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}.$$

a) Determinare le immagini $p_U(T_1)$ e $p_U(T_2)$ delle seguenti varietà lineari

$$T_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad T_2 = (0, 2, -1) + < (1, -1, 1) > .$$

b) Si considerino le varietà lineari

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad U' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 3\}.$$

Si osservi che $S \subset U$. Determinare una varietà lineare $S' \subseteq U'$ la cui proiezione ortogonale su U sia S, cioé $p_U(S') = S$.

[Suggerimento: può essere utile tradurre il problema in termini geometrici.]

c) Calcolare la distanza tra le varietà lineari S e S'.

Esercizio 4. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare gli autovalori reali e complessi della matrice A

b) Dimostrare che A è non è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

c) Scrivere una matrice H invertibile e una matrice J triangolare tale che $H^{-1}AH = J$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
Padova 16-06-09
TEMA n.4

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Siano dati tre vettori non nulli $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ di uno spazio vettoriale V, con $\mathbf{v}_3 \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$ La somma dei due sottospazi $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$ e $< \mathbf{v}_3 >$ è diretta, cioè vale $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \oplus < \mathbf{v}_3 >$.

b) $\lambda = 0$ non può essere autovalore di un endomorfismo.

c) Nello spazio $\mathbb{A}^3$, se la retta r non è contenuta nel piano π, allora la distanza $d = d(r, \pi) \gneq 0$

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Siano dati il sottospazio $W =< (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1) >$ di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, -2, -3)$, $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, 1)$

a) Si dicano quali tra i vettori $\mathbf{v}_i$ con $i \in \{1, 2, 3\}$ verificano

$$\dim(W + < \mathbf{v}_i >) = 2.$$

b) Si dicano quali tra i tre vettori sono in somma diretta con W, cioè verificano

$$W \oplus < \mathbf{v}_j > .$$

c) Determinare base e dimensione di $(W + < \mathbf{v}_1 >) \cap (W + < \mathbf{v}_2 >)$.

d) Determinare base e dimensione di $(W + < \mathbf{v}_1 >) + (W + < \mathbf{v}_3 >)$.

Esercizio 2.

a) Determinare un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, scrivendo esplicitamente $L(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tale che $\mathrm{Ker}\,(L) =< (-1, 1, 1) >$ e $\mathrm{Im}\,(L) =< (0, 1, 0), (0, 0, 1) >$.

b) Si calcoli la matrice $M(L; \mathcal{B}, \mathcal{E})$ di L rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E}$ del codominio.

c) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno con autovalori: $0, 1$ e 512. È unico?

d) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno diagonalizzabile con autovalori: 0 e 1. È unico?

e) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno NON diagonalizzabile con autovalori: 0 e 1. È unico?

Esercizio 3. Sia $p_U : \mathbb{R}^3 \to U$ la proiezione ortogonale sul sottospazio

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$

a) Determinare le immagini $p_U(T_1)$ e $p_U(T_2)$ delle seguenti varietà lineari

$$T_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad T_2 = (0, 2, -1) + < (1, 1, -1) > .$$

b) Si considerino le varietà lineari

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad U' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 3\}.$$

Si osservi che $S \subset U$. Determinare una varietà lineare $S' \subseteq U'$ la cui proiezione ortogonale su U sia S, cioé $p_U(S') = S$.

[Suggerimento: può essere utile tradurre il problema in termini geometrici.]

c) Calcolare la distanza tra le varietà lineari S e S'.

Esercizio 4. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare gli autovalori reali e complessi della matrice A

b) Dimostrare che A è non è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

c) Scrivere una matrice H invertibile e una matrice J triangolare tale che $H^{-1}AH = J$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.