LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Matematica 2
Padova 17-09-08

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Se una matrice quadrata ammette autovalore 0 allora ha nucleo formato dal solo vettore nullo.

b) Vettori linearmente indipendenti sono generatori.

c) Nello spazio tridimensionale affine sono dati una retta r ed un piano π che non contiene r. Siano G_r e G_π le due giaciture: lo spazio somma $G_r + G_\pi$ è tutto $\mathbb{R}^3$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Al variare di k nei numeri reali si trovino tutte le soluzioni del sistema nelle incognite (x, y):

$$\begin{cases} kx - 2y = k + 1 \\ x + (k + 3)y = 0 \\ (k - 1)x - (k + 5)y = (k + 1) \end{cases}$$

Esercizio 2 Al variare del parametro α nei numeri reali si considerino le matrici

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 & 3 \\ 0 & \alpha & 3\alpha - 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Dire per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile.

ii) Trovare per tutti i casi precedenti una base di autovettori.

Esercizio 3 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare euclideo nelle coordinate (x, y, z).

i) Trovare un sottospazio L che in somma diretta con $S =< (1, 1, 1), (3, 0, 1) >$ dia $\mathbb{R}^3$ i.e. $S \oplus L = \mathbb{R}^3$.

ii) Trovare un sottospazio M tale che $S \oplus M = \mathbb{R}^3$ e che sia formato da vettori ortogonali a S.

iii) Trovare un altro sottospazio L_1 per cui $S \oplus L_1 = \mathbb{R}^3$ e che sia tale da essere $L \oplus L_1$. Può essere $L \oplus L_1 = \mathbb{R}^3$?

iv) Determinare il vettore di lunghezza minima nella varietà lineare $(0, 2, -1) + S$.

v) Dire se vera o falsa la seguente affermazione e giustificare. Se N è un sottospazio di dimensione 2 tale che $N + M = \mathbb{R}^3$ allora N contiene un vettore ortogonale a M.

Esercizio 4 Nello spazio euclideo usuale sia data la retta r passante per i punti $(6, 0, 2)$ e $(-3, 0, -1)$. e la retta s di equazione

$$s : \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x - 3z = -2 \end{cases} .$$

i) Determinare la loro posizione reciproca e trovare, se esiste, un piano che le contenga.

ii) Trovare un punto che sia equidistante da r e s.

iii) Trovare il luogo di tutti i punti equidistanti da entrambe le rette.

Esercizio 5 Nello spazio euclideo usuale sia dato il piano ψ di equazione $2x - y = 3$ e la retta m data da $m = (1, 1, 1)+ < (0, 1, 1) >$.

i) Determinare (i.e. trovare una equazione cartesiana) la proiezione ortogonale sul piano ψ di m.

ii) Trovare due punti P_1 e P_2 su m le cui proiezioni ortogonali su ψ determino un segmento di lunghezza 3.

Esercizio 6 Sia $\Delta \subseteq M_2(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le matrici 2×2 diagonalizzabili. Δ è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$? Se si, determinarne una base, altrimenti determinare una base del sottospazio generato $< \Delta >$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate