CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, CHIMICA-MATERIALI, AMBIENTE E TERRITORIO

Padova 19-07-2006

Appello estivo

TEMA n.1

Esercizio 1.

i) Al variare di k nei numeri reali si determinino le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ ky - z = 1 \\ kx + z = -2 \end{cases}$$

ii) Si determinino al variare di a, k nei reali le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ ky - z = 1 \\ kx + z = a \end{cases}$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Mostrare che la matrice non è diagonalizzabile.

ii) Per ogni autovalore, scegliere un autovettore, completare l'insieme così trovato ad una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare la matrice simile ad A associata a tale base.

Esercizio 3. Sia $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha + 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

i) Si determini $\ker A_\alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Si dica per quali valori di α la somma $KerA_\alpha + ImA_\alpha$ è diretta ed, in tal caso, calcolare lo spazio somma.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale. Sia W il sottospazio generato dal vettore $\mathbf{w} = (1, 2, -1)$.

i) Determinare una base di $W^\perp$. Determinare la proiezione ortogonale di $(0, 1, 1)$ su W;

ii) Determinare un sottospazio $S \neq W^\perp$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus S$. Determinare la proiezione di $(0, 1, 1)$ su W secondo tale decomposizione.

iii) Mostrare che per ogni altro sottospazio $\overline{S} \neq S$ tale che $\overline{S} \oplus W = \mathbb{R}^3$ si ha che $S + \overline{S} = \mathbb{R}^3$, ma che tale somma non è diretta.

Il testo prosegue sulla seconda facciata.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \quad , \qquad r_2 : \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

i) Determinare la loro posizione reciproca.

ii) Calcolarne la distanza.

iii) Determinare, se esiste, un vettore $\mathbf{n}$ ortogonale ad entrambe e determinare una retta s che intersechi r_1 e r_2 in punti la cui distanza sia la distanza tra r_1 ed r_2.

iv) Nel piano contenente la retta r_1 e parallelo alla direzione $\mathbf{n}$, determinare un punto P in modo tale che P, $Q = (3, 0, 0)$ e $Q' = (5, 2, 1)$ siano i vertici di un triangolo equilatero.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.