

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA o AEROSPAZIALE

Corso di Matematica 2

PADOVA 19-11-2002

1^a Prova finale

TEMA n.1

1. Sia $L_t : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data dalla formula

$$L_t(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + tx_3, x_1 + tx_3, x_2 + tx_1) \quad t \in \mathbf{R}.$$

- a) Si determini la matrice di L_t rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^3 .
- b) Per quali valori di t L_t è invertibile? Determinare $\dim \text{Im}(L_t)$ e $\dim \ker(L_t)$ al variare di t .
- c) Per quale valore di t il vettore $(1, 1, 1)$ è autovettore di L_t relativo all'autovalore 2?
- d) Sia A la matrice di L_t , con t determinato sopra, rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^3 . Si calcolino gli autovalori e gli autospazi di A .
- e) Si scriva una matrice ortogonale che diagonalizza A .

2. Si consideri il sistema lineare nelle incognite (x_1, x_2, x_3)

$$\Sigma_t : \begin{cases} x_1 + tx_2 &= t^2 - t \\ x_1 + tx_3 &= 0 \\ x_2 + tx_1 &= 0 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

- a) Si discuta e risolva Σ_t per ogni $t \in \mathbf{R}$.
 - b) Si dicano i valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui Σ_t ammette quali soluzioni i punti di una retta, e di tali rette r, s si scrivano delle equazioni parametriche.
 - c) Si determini una rappresentazione cartesiana del piano che contiene r e s .
3. In \mathbf{R}^3 si consideri la base canonica (e_1, e_2, e_3) . Si dica se e perchè la matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ è una matrice di passaggio da una base B alla base canonica di \mathbf{R}^3 .

Si scrivano le coordinate dei vettori della base canonica rispetto ai vettori della base B .

Dopo aver risposto alle domande precedenti:

- Si elenchino tutte le soluzioni reali o complesse dell'equazione $x^6 - 64 = 0$.
- Sia $A \in M_2(\mathbf{R})$, con A matrice simmetrica e $A \neq cI_2$. Si sa che $(3, -4)$ è un autovettore di A . Si scrivano tutti gli autovettori di A .
Si scriva una matrice ortogonale che diagonalizza A .