

**LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA o AEROSPAZIALE**

Corso di Matematica 2

PADOVA 19-11-2002

1<sup>a</sup> Prova finale

TEMA n.1

1. Sia  $L_t : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione lineare data dalla formula

$$L_t(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + tx_3, x_1 + tx_3, x_2 + tx_1) \quad t \in \mathbf{R}.$$

- a) Si determini la matrice di  $L_t$  rispetto alla base canonica di  $\mathbf{R}^3$ .
- b) Per quali valori di  $t$   $L_t$  è invertibile? Determinare  $\dim \text{Im}(L_t)$  e  $\dim \ker(L_t)$  al variare di  $t$ .
- c) Per quale valore di  $t$  il vettore  $(1, 1, 1)$  è autovettore di  $L_t$  relativo all'autovalore 2?
- d) Sia  $A$  la matrice di  $L_t$ , con  $t$  determinato sopra, rispetto alla base canonica di  $\mathbf{R}^3$ .  
Si calcolino gli autovalori e gli autospazi di  $A$ .
- e) Si scriva una matrice ortogonale che diagonalizza  $A$ .

2. Si consideri il sistema lineare nelle incognite  $(x_1, x_2, x_3)$

$$\Sigma_t : \begin{cases} x_1 + tx_2 = t^2 - t \\ x_1 + tx_3 = 0 \\ x_2 + tx_1 = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

- a) Si discuta e risolva  $\Sigma_t$  per ogni  $t \in \mathbf{R}$ .
  - b) Si dicano i valori di  $t \in \mathbf{R}$  per cui  $\Sigma_t$  ammette quali soluzioni i punti di una retta, e di tali rette  $r, s$  si scrivano delle equazioni parametriche.
  - c) Si determini una rappresentazione cartesiana del piano che contiene  $r$  e  $s$ .
3. In  $\mathbf{R}^3$  si consideri la base canonica  $(e_1, e_2, e_3)$ . Si dica se e perchè la matrice  $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$  è una matrice di passaggio da una base  $B$  alla base canonica di  $\mathbf{R}^3$ .
- Si scrivano le coordinate dei vettori della base canonica rispetto ai vettori della base  $B$ .

**Dopo aver risposto alle domande precedenti:**

- Si elenchino tutte le soluzioni reali o complesse dell'equazione  $x^6 - 64 = 0$ .
- Sia  $A \in M_2(\mathbf{R})$ , con  $A$  matrice simmetrica e  $A \neq cI_2$ . Si sa che  $(3, -4)$  è un autovettore di  $A$ . Si scrivano tutti gli autovettori di  $A$ .

Si scriva una matrice ortogonale che diagonalizza  $A$ .