

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA o AEROSPAZIALE
CORSO DI MATEMATICA 2

Padova 19-11-03

1^o Appello

TEMA n.1

Esercizio 1. Discutere, al variare del parametro reale k , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ kx + 2k^2z = 2k - 1. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k il sistema ammette soluzioni e, quando possibile, determinarle.

Esercizio 2. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da:

$$f(x, y, z) = (x + z, -2x - 2z, 2x + y + z).$$

- (i) Determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
- (ii) Determinare il nucleo e l'immagine di f . Stabilire se l'applicazione f è invertibile.
- (iii) Stabilire se A è diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare la sua forma diagonale.
- (iv) La matrice A è simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$?
- (v) Determinare, se possibile, una matrice ortogonale che diagonalizzi B .

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione 3 determinare:

- (i) il piano π parallelo al vettore $v = (1, 1, 1)$ e passante per i punti $(3, 1, 1)$ e $(2, 0, 3)$;
- (ii) i piani paralleli al vettore $v = (1, 1, 1)$ e passanti per i punti $(3, 2, 1)$ e $(2, 1, 0)$;
- (iii) tra i piani determinati in (ii) esiste un piano ortogonale al vettore $(1, 0, 3)$? Ed uno ortogonale al vettore $(-1, 2, -1)$? In caso affermativo scrivere le equazioni cartesiane di tali piani;
- (iv) detta r la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x - z - 1 = 0, \end{cases}$$

calcolare la distanza della retta r dal piano π .

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio vettoriale $W = \langle (1, 0, 1) \rangle$.

1. Determinare un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ tale che $W \oplus S = \mathbb{R}^3$.
2. Determinare una base di S .
3. Sia L l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ così definito: $L(w) = w$ per ogni vettore $w \in W$ e $L(v) = 3v$ per ogni vettore $v \in S$. Determinare la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Domande.

1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Può esistere una matrice B tale che $\det(AB) = 1$?

2. Sia H una matrice ortogonale. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice tH è ortogonale?

3. Si considerino le sottovarietà lineari di dimensione 2 (piani) in uno spazio affine di dimensione 4. Si studino le posizioni reciproche (parallelismo, intersezioni) di due piani.