LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

Padova 20-08-08

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti, allora $\mathbf{v}_k$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$.

b) Una matrice simmetrica è simile ad una matrice ortogonale.

c) Date due rette sghembe, esistono infinite rette ortogonali ed incidenti entrambe.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$f\left((0,-1,1) + \langle(1,1,1)\rangle\right) = (2,1,3); \quad f^{-1}(1,0,1) = (1,2,1) + \langle(1,1,1)\rangle$$

a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare nucleo ed immagine di f. L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?

c) L'applicazione f è un endomorfismo? È un isomorfismo? È un'isometria?

d) Calcolare la controimmagine del vettore $(1,1,2)$.

Esercizio 2 Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1-k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Per ogni valore di k, determinare autovalori ed autovettori della matrice A_k.

b) Esistono vettori di $\mathbb{R}^3$ che sono autovettori di A_k per ogni k?

c) Per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile? Per tali valori, scrivere una matrice H tale che $H^{-1}A_kH$ sia diagonale.

d) Determinare la forma di Jordan di A_k quando questa non è diagonalizzabile.

e) Esistono valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile? Per tali valori, scrivere una matrice ortogonale H tale che $H^{-1}A_kH$ sia diagonale.

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento ortonormale $(\mathcal{R}; x, y, z)$, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}, \qquad r' : \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3y - 2z = -6 \end{cases}$$

a) Determinare la posizione reciproca tra r ed r'.

b) Scrivere le equazioni cartesiane di un piano π avente uguale distanza positiva da r ed r'.

c) Scelto a piacere un punto $P \in \pi$, scrivere equazioni cartesiane di una retta per P incidente r ed r'.

d) Scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ al riferimento $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ che ha lo stesso orientamento ed in cui l'asse X è la retta r e l'asse Y è la retta ortogonale ed incidente r ed r'.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Matematica 2
Padova 20-08-08
TEMA n.2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti, allora anche $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ sono indipendenti.

b) Se A è una matrice ortogonale, allora AA^T è simmetrica.

c) Date due rette in $\mathbb{A}^3$, se esiste un'unica coppia di punti di minima distanza, allora le rette sono sghembe.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$f\left((0,1,1) + \langle(-1,1,2)\rangle\right) = (2,1,3); \quad f^{-1}(1,0,1) = (1,1,1) + \langle(-1,1,2)\rangle$$

a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare nucleo ed immagine di f. L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?

c) L'applicazione f è un endomorfismo? È un isomorfismo? È un'isometria?

d) Calcolare la controimmagine del vettore $(1,1,2)$.

Esercizio 2 Al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$M_h = \begin{pmatrix} h & 0 & h+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Per ogni valore di h, determinare autovalori ed autovettori della matrice M_h.

b) Esistono vettori di $\mathbb{R}^3$ che sono autovettori di M_h per ogni h?

c) Per quali valori di h la matrice M_h è diagonalizzabile? Per tali valori, scrivere una matrice H tale che $H^{-1}M_hH$ sia diagonale.

d) Determinare la forma di Jordan di M_h quando questa non è diagonalizzabile.

e) Esistono valori di h per i quali M_h è ortogonalmente diagonalizzabile? Per tali valori, scrivere una matrice ortogonale H tale che $H^{-1}M_hH$ sia diagonale.

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento ortonormale $(\mathcal{R}; x, y, z)$, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}, \qquad r' : \begin{cases} 2x + z = 2 \\ 2y - 3z = 6 \end{cases}$$

a) Determinare la posizione reciproca tra r ed r'.

b) Scrivere le equazioni cartesiane di un piano π avente uguale distanza positiva da r ed r'.

c) Scelto a piacere un punto $P \in \pi$, scrivere equazioni cartesiane di una retta per P incidente r ed r'.

d) Scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ al riferimento $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ che ha lo stesso orientamento ed in cui l'asse X è la retta r e l'asse Y è la retta ortogonale ed incidente r ed r'.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate