LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 20-09-2005
TEMA n.1

Esercizio 1. Dati i sottospazi $U =< (1, 1, 1), (1, -1, 2) >$ e $W =< (2, 1, -2), (4, 1, 1) >$ di $\mathbb{R}^3$:

a) determinare una base per lo spazio $U + W$. Tale somma è diretta?

b) determinare un sottospazio T tale che $T \oplus (U \cap W) = \mathbb{R}^3$;

c) determinare, se esiste, un endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ tale che $L(U) = W$ ed $L(W) = U$;

d) determinare il vettore di lunghezza minima della varietà lineare $(0, 4, 5) + U$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare ammette soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 11x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + (k^2 - k)x_3 + (5 - k^2)x_4 = -k^2 - 3 \\ -x_2 + 2(k^2 - 1)x_3 + (3k^2 - 4)x_4 = 2(k^2 + k - 4) \end{cases}$$

Risolvere il sistema per i valori di k per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 3. Esiste un endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ tale che $L^{-1}(1, 2, 1) = (0, 1, 2)+ < (1, -1, 1) >$ ed $(1, 1, 0)$ sia autovettore di autovalore $\sqrt{7}$? È unico? È invertibile?

Esercizio 4. Consideriamo, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 2+2\alpha \\ 0 & 2+2\alpha & 0 \\ 2+2\alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

a) Per quali valori di α la matrice è diagonalizzabile?

b) Per i valori trovati al punto precedente, determinare una base di autovettori. Determinare, se possibile, una base ortonormale di autovettori.

c) Per i valori di α esclusi al punto a), determinare una matrice di Jordan simile ad A_α.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo siano date le rette

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z + 3 = 0 \end{cases} ; \qquad s : \begin{cases} x - 4y + 4 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} .$$

a) Determinare la retta ℓ passante per $P(1, 0, 1)$, incidente r ed ortogonale ad s.

b) Le rette ℓ ed s sono complanari?

c) Calcolare la distanza tra ℓ ed s.

d) Sia s' la retta per P parallela ad s. Determinare le equazioni di s nel sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta ℓ e l'asse Y è la retta s'.

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard, si consideri il vettore $\mathbf{w}_{\lambda,\mu} = (\lambda, 2\lambda-\mu, \lambda+\mu)$.

a) Dimostrare che l'applicazione $f_{\lambda,\mu} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f_{\lambda,\mu}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}_{\lambda,\mu}$ è lineare e calcolarne nucleo ed immagine.

b) Dimostrare che, al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ i sottospazi $\ker(f_{\lambda,\mu})$ costituiscono un fascio di piani e calcolarne l'asse.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.