LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 21-03-2005
TEMA n.1

Esercizio 1. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = <(5,1,7,0),(1,0,0,1),(0,1,2,6)> \quad W = <(1,0,2,1),(1,0,1,1)>$$

a) determinare una base per lo spazio $U \cap W$;

b) determinare una base per lo spazio $U + W$. Tale somma è diretta?

c) determinare il vettore di lunghezza minima della varietà lineare $(2,1,0,4) + W$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le condizioni :

$$\begin{array}{ll} L_a(1,0,0) = (1,0,a,0); & L_a(0,1,0) = (0,1,1,a); \\ L_a(1,1,0) = (1,1,a+1,a); & L_a(1,1,-1) = (0,0,9-a^2,9-a^2) \end{array}$$

individuano un'applicazione lineare $L_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Per tali valori:

a) scrivere la matrice di L_a rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$;

b) si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione L_a è iniettiva e per quali è suriettiva;

c) si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v} = (-1, 2, a^2 + 2a + 2, a^3 + a^2 - 4a)$ appartiene a $\operatorname{Im} L_a$ e, per tali valori, determinare $L_a^{-1}(\mathbf{v})$.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b-2 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori per A.

b) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è simile ad una matrice di Jordan.

c) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è ortogonalmente diagonalizzabile.

d) Per i valori di $b \in \mathbb{R}$ trovati al punto precedente, calcolare A^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.

a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π ortogonale a $\sigma : x - y + 2z = 0$ e contenente la retta

$$r : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - z = 1. \end{cases}$$

b) Scrivere le equazioni parametriche di r.

c) Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{6}$ dalla retta $s = \pi \cap \sigma$.

d) Scrivere le equazioni di π nel sistema di riferimento individuato dai punti $Q_0(1,1,0)$, $Q_1(2,0,2)$, $Q_2(1,3,1)$, $Q_3(6,2,-2)$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 21-03-2005
TEMA n.2

Esercizio 1. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U =< (7,1,5,0),(1,0,0,2),(0,1,2,2) > \qquad W =< (1,0,0,1),(2,-1,-2,1) >$$

a) determinare una base per lo spazio $U \cap W$;

b) determinare una base per lo spazio $U + W$. Tale somma è diretta?

c) determinare il vettore di lunghezza minima della varietà lineare $(2,-2,-1,-1) + W$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le condizioni :

$$\begin{array}{ll} L_a(1,0,0) = (1,0,a,0); & L_a(0,1,0) = (0,1,1,a+1); \\ L_a(1,2,0) = (1,2,a+2,2a+2); & L_a(1,2,-1) = (0,0,9-a^2,9-a^2) \end{array}$$

individuano un'applicazione lineare $L_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Per tali valori:

a) scrivere la matrice di L_a rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$;

b) si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione L_a è iniettiva e per quali è suriettiva;

c) si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v} = (1,-1,a^2-2a-1,-a^3+a^2+5a-1)$ appartiene a $\operatorname{Im} L_a$ e, per tali valori, determinare $L_a^{-1}(\mathbf{v})$.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & b+2 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori per A.

b) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è simile ad una matrice di Jordan.

c) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è ortogonalmente diagonalizzabile.

d) Per i valori di $b \in \mathbb{R}$ trovati al punto precedente, calcolare A^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.

a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π ortogonale a $\sigma : x+y+z=0$ e contenente la retta

$$r : \begin{cases} x+2y=1 \\ x+z=0. \end{cases}$$

b) Scrivere le equazioni parametriche di r.

c) Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{3}$ dalla retta $s = \pi \cap \sigma$.

d) Scrivere le equazioni di π nel sistema di riferimento individuato dai punti $Q_0(1,0,-1)$, $Q_1(8,-2,-6)$, $Q_2(2,1,0)$, $Q_3(2,-4,2)$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 21-03-2005
TEMA n.3

Esercizio 1. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = <(7,5,1,0),(1,0,0,-1),(0,1,-1,2)> \qquad W = <(1,0,1,0),(2,1,0,1)>$$

a) determinare una base per lo spazio $U \cap W$;

b) determinare una base per lo spazio $U + W$. Tale somma è diretta?

c) determinare il vettore di lunghezza minima della varietà lineare $(1,0,0,0) + W$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le condizioni :

$$\begin{array}{ll} L_a(1,0,0) = (1,0,a,0); & L_a(0,1,0) = (0,1,-1,a); \\ L_a(2,-1,0) = (2,-1,2a+1,-a); & L_a(2,-1,-1) = (0,0,4-a^2,4-a^2) \end{array}$$

individuano un'applicazione lineare $L_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Per tali valori:

a) scrivere la matrice di L_a rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$;

b) si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione L_a è iniettiva e per quali è suriettiva;

c) si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v} = (2,1,a^2-1,a^3+a^2-5a)$ appartiene a $\operatorname{Im} L_a$ e, per tali valori, determinare $L_a^{-1}(\mathbf{v})$.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b-2 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori per A.

b) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è simile ad una matrice di Jordan.

c) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è ortogonalmente diagonalizzabile.

d) Per i valori di $b \in \mathbb{R}$ trovati al punto precedente, calcolare A^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.

a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π ortogonale a $\sigma : x + y + 3z = 0$ e contenente la retta

$$r : \begin{cases} x + 2z = -1 \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

b) Scrivere le equazioni parametriche di r.

c) Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{11}$ dalla retta $s = \pi \cap \sigma$.

d) Scrivere le equazioni di π nel sistema di riferimento individuato dai punti $Q_0(1,2,-1)$, $Q_1(2,1,-1)$, $Q_2(2,3,-2)$, $Q_3(4,5,-3)$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 21-03-2005
TEMA n.4

Esercizio 1. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U =< (5,7,1,0),(1,0,0,1),(0,1,-1,2) > \qquad W =< (1,0,1,0),(2,1,0,3) >$$

a) determinare una base per lo spazio $U \cap W$;

b) determinare una base per lo spazio $U + W$. Tale somma è diretta?

c) determinare il vettore di lunghezza minima della varietà lineare $(0,0,0,1) + W$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le condizioni :

$$\begin{array}{ll} L_a(1,0,0) = (1,0,a,0); & L_a(0,1,0) = (0,1,-1,a-1); \\ L_a(1,2,0) = (1,2,a-2,2a-2); & L_a(1,2,-1) = (0,0,4-a^2,4-a^2) \end{array}$$

individuano un'applicazione lineare $L_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Per tali valori:

a) scrivere la matrice di L_a rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$;

b) si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione L_a è iniettiva e per quali è suriettiva;

c) si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v} = (1,-1,a^2+3a+1,a^3+a^2-3a+1)$ appartiene a $\operatorname{Im} L_a$ e, per tali valori, determinare $L_a^{-1}(\mathbf{v})$.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & b+2 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori per A.

b) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è simile ad una matrice di Jordan.

c) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è ortogonalmente diagonalizzabile.

d) Per i valori di $b \in \mathbb{R}$ trovati al punto precedente, calcolare A^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.

a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π ortogonale a $\sigma : 2x + y - z = 0$ e contenente la retta

$$r : \begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2y + z = 0. \end{cases}$$

b) Scrivere le equazioni parametriche di r.

c) Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{6}$ dalla retta $s = \pi \cap \sigma$.

d) Scrivere le equazioni di π nel sistema di riferimento individuato dai punti $Q_0(1,-2,0)$, $Q_1(3,-1,-1)$, $Q_2(2,-3,1)$, $Q_3(1,-1,1)$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.