LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 21-07-09
TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Un sistema omogeneo che ha una soluzione non nulla ammette infinite soluzioni.

b) Se una matrice M è diagonalizzabile ed i suoi autospazi sono a due a due ortogonali, allora M è simmetrica.

c) Due piani ortogonali in $\mathbb{A}^3$ non hanno direzioni in comune.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Dimostrare che esiste un'unico valore di $k \in \mathbb{R}$, e trovarlo, per il quale le condizioni:

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\0\\0\\1\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-k\end{pmatrix}.$$

determinano un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

a) Determinare nucleo ed immagine di f. L'applicazione è iniettiva? È suriettiva?

b) Sia $S = \{(x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4 | \, y + z = 0\}$. Determinare una base per $S \cap \operatorname{Im} f$.

c) La somma $S + \operatorname{Im} f$ è diretta? Scriverne una base.

d) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^4}$.

e) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h \circ f = id_{\mathbb{R}^3}$.

Esercizio 2 Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Il sottospazio $z = 0$ contiene autovettori della matrice A? Per quali autovalori?

b) Determinare tutti gli autovalori e gli autospazi di A.

c) Scrivere, se esiste, una matrice ortogonale H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.

d) La matrice B ha autovettori in comune con A? Le due matrici sono simili?

e) Scrivere una matrice K tale che $K^{-1}BK$ sia una matrice di Jordan. K può essere ortogonale?

Esercizio 3 Si considerino i punti $P(-1, 0, -1)$ e $Q(2, 0, -3)$ e la retta

$$s : \begin{cases} 2x + 3y + 3z + 1 = 0 \\ 4x + 7y + 6z + 2 = 0 \end{cases}.$$

a) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per P e Q.

b) Determinare la posizione reciproca tra r ed s.

c) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi distanza 1 da s.

d) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi la minima distanza possibile da s.

e) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi la massima distanza possibile da s.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 21-07-09
TEMA n.2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Un sistema non omogeneo che ha una soluzione non nulla ammette infinite soluzioni.

b) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile.

c) Dato un piano π in $\mathbb{A}^3$, si può sempre trovare una retta r che non ha direzioni in comune con π.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Dimostrare che esiste un'unico valore di $k \in \mathbb{R}$, e trovarlo, per il quale le condizioni:

$$f\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix};\quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix};\quad f\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\k\end{pmatrix};\quad f\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-k\end{pmatrix}.$$

determinano un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

a) Determinare nucleo ed immagine di f. L'applicazione è iniettiva? È suriettiva?

b) Sia $S = \{(x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4 | \, y + z = 0\}$. Determinare una base per $S \cap \operatorname{Im} f$.

c) La somma $S + \operatorname{Im} f$ è diretta? Scriverne una base.

d) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f = id_{\mathbb{R}^3}$.

e) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^4}$.

Esercizio 2 Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -6 & -1 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \\ -5 & 2 & -9 \end{pmatrix}$.

a) Il sottospazio $x = 0$ contiene autovettori della matrice A? Per quali autovalori?

b) Determinare tutti gli autovalori e gli autospazi di A.

c) Scrivere, se esiste, una matrice ortogonale H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.

d) La matrice B ha autovettori in comune con A? Le due matrici sono simili?

e) Scrivere una matrice K tale che $K^{-1}BK$ sia una matrice di Jordan. K può essere ortogonale?

Esercizio 3 Si considerino i punti $P(-1, -1, 0)$ e $Q(2, -3, 0)$ e la retta

$$s : \begin{cases} 2x + 3y + 3z + 1 = 0 \\ 4x + 6y + 7z + 2 = 0 \end{cases}.$$

a) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per P e Q.

b) Determinare la posizione reciproca tra r ed s.

c) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi distanza 1 da s.

d) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi la minima distanza possibile da s.

e) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi la massima distanza possibile da s.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 21-07-09
TEMA n.3

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Se un sistema lineare ha due soluzioni distinte allora ha infinite soluzioni.

b) Se λ e μ sono autovalori di una matrice M, con $\lambda \neq \mu$, allora gli autospazi V_λ e V_μ sono tra loro ortogonali.

c) Dato un piano $\pi \subset \mathbb{A}^3$ si può sempre trovare un piano σ che non ha direzioni in comune con π.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Dimostrare che esiste un'unico valore di $k \in \mathbb{R}$, e trovarlo, per il quale le condizioni:

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\0\\0\\-1\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\k\end{pmatrix}.$$

determinano un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

a) Determinare nucleo ed immagine di f. L'applicazione è iniettiva? È suriettiva?

b) Sia $S = \{(x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4 | \, y + z = 0\}$. Determinare una base per $S \cap \operatorname{Im} f$.

c) La somma $S + \operatorname{Im} f$ è diretta? Scriverne una base.

d) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^4}$.

e) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h \circ f = id_{\mathbb{R}^3}$.

Esercizio 2 Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 6 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 9 & 5 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Il sottospazio $z = 0$ contiene autovettori della matrice A? Per quali autovalori?

b) Determinare tutti gli autovalori e gli autospazi di A.

c) Scrivere, se esiste, una matrice ortogonale H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.

d) La matrice B ha autovettori in comune con A? Le due matrici sono simili?

e) Scrivere una matrice K tale che $K^{-1}BK$ sia una matrice di Jordan. K può essere ortogonale?

Esercizio 3 Si considerino i punti $P(-1, 0, -1)$ e $Q(-3, 0, 2)$ e la retta

$$s : \begin{cases} 3x + 3y + 2z + 1 = 0 \\ 6x + 7y + 4z + 2 = 0 \end{cases}.$$

a) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per P e Q.

b) Determinare la posizione reciproca tra r ed s.

c) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi distanza 1 da s.

d) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi la minima distanza possibile da s.

e) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi la massima distanza possibile da s.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 21-07-09
TEMA n.4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Un sistema omogeneo che ha una soluzione non nulla ammette infinite soluzioni.

b) Se gli autospazi di una matrice M sono in somma diretta tra loro, allora M è simmetrica.

c) Due piani in $\mathbb{A}^3$ hanno sempre almeno una direzione in comune.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Dimostrare che esiste un'unico valore di $k \in \mathbb{R}$, e trovarlo, per il quale le condizioni:

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-k\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\k\end{pmatrix}.$$

determinano un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

a) Determinare nucleo ed immagine di f. L'applicazione è iniettiva? È suriettiva?

b) Sia $S = \{(x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4 | \, y + z = 0\}$. Determinare una base per $S \cap \operatorname{Im} f$.

c) La somma $S + \operatorname{Im} f$ è diretta? Scriverne una base.

d) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f = id_{\mathbb{R}^3}$.

e) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^4}$.

Esercizio 2 Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & -6 & -1 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & -9 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Il sottospazio $x = 0$ contiene autovettori della matrice A? Per quali autovalori?

b) Determinare tutti gli autovalori e gli autospazi di A.

c) Scrivere, se esiste, una matrice ortogonale H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.

d) La matrice B ha autovettori in comune con A? Le due matrici sono simili?

e) Scrivere una matrice K tale che $K^{-1}BK$ sia una matrice di Jordan. K può essere ortogonale?

Esercizio 3 Si considerino i punti $P(0, -1, -1)$ e $Q(0, 2, -3)$ e la retta

$$s : \begin{cases} 3x + 2y + 3z + 1 = 0 \\ 7x + 4y + 6z + 2 = 0 \end{cases}.$$

a) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per P e Q.

b) Determinare la posizione reciproca tra r ed s.

c) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi distanza 1 da s.

d) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi la minima distanza possibile da s.

e) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi la massima distanza possibile da s.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate