LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO

Corso di MATEMATICA 2 - prova del 22-03-2006

TEMA n.1

Esercizio 1. Sia $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la funzione definita da

$$\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che φ è lineare e determinare $\ker\varphi$ ed $\mathrm{I}m\,\varphi$.

b) Sia $S \leq M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici simmetriche 2×2; determinare una base per lo spazio $S \cap \mathrm{I}m\,\varphi$. La somma $S + \mathrm{I}m\,\varphi$ è diretta?

c) Determinare, se possibile, un sottospazio $T \leq M_2(\mathbb{R})$ tale che $(S + \mathrm{I}m\,\varphi) \oplus T = M_2(\mathbb{R})$.

d) Sia $\psi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ l'isomorfismo $\psi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x, y, z, t)$: determinare il vettore di norma minima della varietà lineare $(1, 2, 3, 4) + \mathrm{I}m\,(\psi \circ \varphi)$.

Esercizio 2. Sia $\mathbf{v} \in \langle(1, -1, 1)\rangle$. Verificare che le condizioni $L(2, 1, 0) = (2, 1, 3)$, $L(1, 2, 0) = (1, 2, 3)$ ed $L(0, 0, 1) = \mathbf{v}$ individuano un endomorfismo $L_\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^3$ e scriverne la matrice $A_\mathbf{v}$ rispetto alla base canonica.

a) Per ogni $\mathbf{v} \in \langle(1, -1, 1)\rangle$, stabilire se l'endomorfismo $L_\mathbf{v}$ è diagonalizzabile, determinandone una base di autovettori. Altrimenti, scrivere una matrice di Jordan simile ad $A_\mathbf{v}$.

b) Gli endomorfismi $L_\mathbf{v}$ ammettono autovettori comuni?

c) Esistono dei $\mathbf{v} \in \langle(1, -1, 1)\rangle$ per i quali $A_\mathbf{v}$ sia la matrice di una proiezione p_U^W (per opportuni sottospazi U e W tali che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$)?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$, con un sistema di riferimento $\mathcal{R}$, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - z = 1 \\ 2y - z = 4 \end{cases}, \qquad s_\alpha : \begin{cases} x + 2y - 2z = 9\alpha + 2 \\ (2 - 9\alpha)x - 2z = 6\alpha - 9\alpha^2 \end{cases}.$$

a) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la posizione reciproca delle due rette.

b) Verificare che esiste un valore $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale r ed s_α sono incidenti ed ortogonali.

c) Detto $\bar{\alpha}$ il valore trovato al punto precedente, sia $\mathcal{R}'$ il sistema di riferimento ortonormale in cui l'asse X è la retta r, l'asse Y è la retta $s_{\bar{\alpha}}$ (entrambe orientate secondo le x crescenti) e che ha lo stesso orientamento di $\mathcal{R}$. Scrivere le equazioni di passaggio da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$.

d) Scrivere le equazioni nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ delle rette s_α che sono parallele ad r.

Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO

Corso di MATEMATICA 2 - prova del 22-03-2006

TEMA n.2

Esercizio 1. Sia $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la funzione definita da

$$\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che φ è lineare e determinare $\ker\varphi$ ed $\mathrm{I}m\,\varphi$.

b) Sia $S \leq M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici simmetriche 2×2; determinare una base per lo spazio $S \cap \mathrm{I}m\,\varphi$. La somma $S + \mathrm{I}m\,\varphi$ è diretta?

c) Determinare, se possibile, un sottospazio $T \leq M_2(\mathbb{R})$ tale che $(S + \mathrm{I}m\,\varphi) \oplus T = M_2(\mathbb{R})$.

d) Sia $\psi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ l'isomorfismo $\psi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x, y, z, t)$: determinare il vettore di norma minima della varietà lineare $(1, 2, 3, 4) + \mathrm{I}m\,(\psi \circ \varphi)$.

Esercizio 2. Sia $\mathbf{v} \in \langle(1, 1, 2)\rangle$. Verificare che le condizioni $L(2, 1, 0) = (2, 1, 2)$, $L(1, -1, 0) = (1, -1, 4)$ ed $L(0, 0, 1) = \mathbf{v}$ individuano un endomorfismo $L_\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^3$ e scriverne la matrice $A_\mathbf{v}$ rispetto alla base canonica.

a) Per ogni $\mathbf{v} \in \langle(1, 1, 2)\rangle$, stabilire se l'endomorfismo $L_\mathbf{v}$ è diagonalizzabile, determinandone una base di autovettori. Altrimenti, scrivere una matrice di Jordan simile ad $A_\mathbf{v}$.

b) Gli endomorfismi $L_\mathbf{v}$ ammettono autovettori comuni?

c) Esistono dei $\mathbf{v} \in \langle(1, 1, 2)\rangle$ per i quali $A_\mathbf{v}$ sia la matrice di una proiezione p_U^W (per opportuni sottospazi U e W tali che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$)?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$, con un sistema di riferimento $\mathcal{R}$, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - z = 1 \\ 2y - z = 4 \end{cases}, \qquad s_\alpha : \begin{cases} 4x - 4y - 2z = 3\alpha - 1 \\ 8y - (6\alpha - 2)z = \alpha^2 + 2\alpha + 9 \end{cases}.$$

a) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la posizione reciproca delle due rette.

b) Verificare che esiste un valore $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale r ed s_α sono incidenti ed ortogonali.

c) Detto $\bar{\alpha}$ il valore trovato al punto precedente, sia $\mathcal{R}'$ il sistema di riferimento ortonormale in cui l'asse X è la retta r, l'asse Y è la retta $s_{\bar{\alpha}}$ (entrambe orientate secondo le x crescenti) e che ha lo stesso orientamento di $\mathcal{R}$. Scrivere le equazioni di passaggio da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$.

d) Scrivere le equazioni nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ delle rette s_α che sono parallele ad r.

Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO

Corso di MATEMATICA 2 - prova del 22-03-2006

TEMA n.3

Esercizio 1. Sia $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la funzione definita da

$$\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che φ è lineare e determinare $\ker\varphi$ ed $\mathrm{I}m\,\varphi$.

b) Sia $S \leq M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici simmetriche 2×2; determinare una base per lo spazio $S \cap \mathrm{I}m\,\varphi$. La somma $S + \mathrm{I}m\,\varphi$ è diretta?

c) Determinare, se possibile, un sottospazio $T \leq M_2(\mathbb{R})$ tale che $(S + \mathrm{I}m\,\varphi) \oplus T = M_2(\mathbb{R})$.

d) Sia $\psi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ l'isomorfismo $\psi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x, y, z, t)$: determinare il vettore di norma minima della varietà lineare $(1, 2, 3, 4) + \mathrm{I}m\,(\psi \circ \varphi)$.

Esercizio 2. Sia $\mathbf{v} \in \langle(2, 1, -1)\rangle$. Verificare che le condizioni $L(1, 1, 0) = (1, 1, 1)$, $L(3, 1, 0) = (3, 1, -1)$ ed $L(0, 0, 1) = \mathbf{v}$ individuano un endomorfismo $L_{\mathbf{v}}$ di $\mathbb{R}^3$ e scriverne la matrice $A_{\mathbf{v}}$ rispetto alla base canonica.

a) Per ogni $\mathbf{v} \in \langle(2, 1, -1)\rangle$, stabilire se l'endomorfismo $L_{\mathbf{v}}$ è diagonalizzabile, determinandone una base di autovettori. Altrimenti, scrivere una matrice di Jordan simile ad $A_{\mathbf{v}}$.

b) Gli endomorfismi $L_{\mathbf{v}}$ ammettono autovettori comuni?

c) Esistono dei $\mathbf{v} \in \langle(2, 1, -1)\rangle$ per i quali $A_{\mathbf{v}}$ sia la matrice di una proiezione p_U^W (per opportuni sottospazi U e W tali che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$)?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$, con un sistema di riferimento $\mathcal{R}$, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - 2z = -4 \end{cases}, \qquad s_\alpha : \begin{cases} x - 2y + 2z = 9\alpha + 2 \\ (2 - 9\alpha)x - 2y = 6\alpha - 9\alpha^2 \end{cases}.$$

a) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la posizione reciproca delle due rette.

b) Verificare che esiste un valore $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale r ed s_α sono incidenti ed ortogonali.

c) Detto $\bar{\alpha}$ il valore trovato al punto precedente, sia $\mathcal{R}'$ il sistema di riferimento ortonormale in cui l'asse X è la retta r, l'asse Y è la retta $s_{\bar{\alpha}}$ (entrambe orientate secondo le x crescenti) e che ha lo stesso orientamento di $\mathcal{R}$. Scrivere le equazioni di passaggio da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$.

d) Scrivere le equazioni nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ delle rette s_α che sono parallele ad r.

Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
Corso di MATEMATICA 2 - prova del 22-03-2006
TEMA n.4

Esercizio 1. Sia $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la funzione definita da

$$\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che φ è lineare e determinare $\ker\varphi$ ed $\mathrm{Im}\,\varphi$.

b) Sia $S \leq M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici simmetriche 2×2; determinare una base per lo spazio $S \cap \mathrm{Im}\,\varphi$. La somma $S + \mathrm{Im}\,\varphi$ è diretta?

c) Determinare, se possibile, un sottospazio $T \leq M_2(\mathbb{R})$ tale che $(S + \mathrm{Im}\,\varphi) \oplus T = M_2(\mathbb{R})$.

d) Sia $\psi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ l'isomorfismo $\psi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x, y, z, t)$: determinare il vettore di norma minima della varietà lineare $(1, 2, 3, 4) + \mathrm{Im}\,(\psi \circ \varphi)$.

Esercizio 2. Sia $\mathbf{v} \in \langle(3, 1, 2)\rangle$. Verificare che le condizioni $L(1, -1, 0) = (1, -1, 4)$, $L(2, 1, 0) = (2, 1, -1)$ ed $L(0, 0, 1) = \mathbf{v}$ individuano un endomorfismo $L_{\mathbf{v}}$ di $\mathbb{R}^3$ e scriverne la matrice $A_{\mathbf{v}}$ rispetto alla base canonica.

a) Per ogni $\mathbf{v} \in \langle(3, 1, 2)\rangle$, stabilire se l'endomorfismo $L_{\mathbf{v}}$ è diagonalizzabile, determinandone una base di autovettori. Altrimenti, scrivere una matrice di Jordan simile ad $A_{\mathbf{v}}$.

b) Gli endomorfismi $L_{\mathbf{v}}$ ammettono autovettori comuni?

c) Esistono dei $\mathbf{v} \in \langle(3, 1, 2)\rangle$ per i quali $A_{\mathbf{v}}$ sia la matrice di una proiezione p_U^W (per opportuni sottospazi U e W tali che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$)?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$, con un sistema di riferimento $\mathcal{R}$, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} 2x - z = 4 \\ y - z = 1 \end{cases}, \qquad s_\alpha : \begin{cases} 4x - 4y + 2z = 1 - 3\alpha \\ 8x - (6\alpha - 2)z = \alpha^2 + 2\alpha + 9 \end{cases}.$$

a) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la posizione reciproca delle due rette.

b) Verificare che esiste un valore $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale r ed s_α sono incidenti ed ortogonali.

c) Detto $\bar{\alpha}$ il valore trovato al punto precedente, sia $\mathcal{R}'$ il sistema di riferimento ortonormale in cui l'asse X è la retta r, l'asse Y è la retta $s_{\bar{\alpha}}$ (entrambe orientate secondo le x crescenti) e che ha lo stesso orientamento di $\mathcal{R}$. Scrivere le equazioni di passaggio da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$.

d) Scrivere le equazioni nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ delle rette s_α che sono parallele ad r.

Ogni risposta va opportunamente giustificata.