

Università degli Studi di Padova

Appello 23 settembre 2002

ESAME DI MATEMATICA II

A.A.01/02

Nicoletta Cantarini - Bruno Chiarellotto

Lo studente indichi chiaramente nel foglio a quale corso di laurea triennale è iscritto. Lo studente svolga la prima parte e, solo in seguito, la seconda. Non è consentito utilizzare appunti né libri.

PRIMA PARTE

Ex.1 Al variare di $s \in \mathbf{R}$, si consideri l'endomorfismo g_s di $\mathbf{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è la seguente:

$$\begin{pmatrix} s & 0 & 1 \\ 1 & -1 & s+1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i) Studiare $\ker g_s$ per ogni $s \in \mathbf{R}$.
- ii) Determinare i valori del parametro s per cui $(2, 2, 2) \in \text{Im}(g_s)$.
- iii) Per ogni valore del parametro determinare, se possibile, un sottospazio $T_s \neq \{\mathbf{O}\}$ di $\mathbf{R}^3$, per cui si abbia $T_s \oplus \text{Im}(g_s) = \mathbf{R}^3$.

Ex.2 Si consideri un endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ soddisfacente le seguenti condizioni:

- a) $(1, 1, 1)$ è autovettore di f relativo all'autovalore 1,
- b) $f(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$,
- c) $f(0, 1, 0) = (0, 3, 0)$.

i) Mostrare che tale applicazione è unica e determinare la matrice ad essa associata rispetto alla base canonica.

ii) Trovare gli autovalori e gli autospazi di f e stabilire se f è diagonalizzabile.

iii) Determinare la matrice associata all'applicazione $f \circ f$ rispetto alla base canonica; determinare gli autovalori e gli autospazi di $f \circ f$ e stabilire se $f \circ f$ è diagonalizzabile.

Ex.3 Nello spazio euclideo usuale $A^3(\mathbf{R})$, con coordinate x, y, z , si considerino le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y = 0, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = t + 2. \end{cases}$$

i) Si studi la posizione reciproca delle rette r e s e si calcoli la loro distanza. Si determinino inoltre i punti di minima distanza tra le due rette.

ii) Quante rette vi sono che intersecano sia r che s e che sono ortogonali ad entrambe le rette? Esistono rette ortogonali sia a r che a s ma che non abbiano punti di intersezione né con s né con r ? E rette ortogonali ad entrambe le rette assegnate ma che intersechino solo s e non r ?

Ex.4 Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio vettoriale L costituito dai vettori (x, y, z) tali che $2x - y + 3z = 0$.

i) Determinare una base ortonormale di L .

ii) Completare la base trovata in i) in una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

iii) Determinare la proiezione ortogonale di $(2, 1, 1)$ su L .

SECONDA PARTE

1) Rispondere alle seguenti domande:

- 1.a Due matrici simili hanno lo stesso determinante?
- 1.b Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ una applicazione lineare. Quali sono le possibili dimensioni di $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$?
- 1.c Esiste un sistema lineare in tre incognite di rango uno il cui insieme di soluzioni sia $X = (1, 0, 0) + \langle (1, -1, 0), (1, 1, 2), (1, -5, -4) \rangle$? Esiste un sistema lineare omogeneo in tre incognite l'insieme delle cui soluzioni sia $S = (1, -1, 0) + \langle (1, 1, 2), (1, -5, -4) \rangle$? Esiste un sistema lineare di 2 equazioni in tre incognite l'insieme delle cui soluzioni sia $T = \langle (1, 2, 1), (1, 1, 1) \rangle$?
- 2) Nello spazio euclideo tridimensionale determinare il luogo dei punti che distano 5 da due piani non paralleli. E se i piani fossero paralleli?
- 3) Dire se esiste un endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ tale che $(1, 2, 1)$ sia un autovettore di f di autovalore 3 e valga $f(1, 0, 2) = f(1, 1, 1)$. Dire se un siffatto endomorfismo è unico e trovare la matrice ad esso associata rispetto alla base canonica.

Attenzione: ogni risposta deve essere opportunamente giustificata.