

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA o AEROSPAZIALE

Corso di Matematica 2

PADOVA 23 settembre 2003

Esercizio 1. Studiare, al variare del parametro reale k , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z e determinarne, quando possibile, le soluzioni:

$$\begin{cases} x + z = k \\ 2x + k^2y + z = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}.$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calcolare gli autovalori di A ed una base di ciascun autospazio.
- 2) Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia una matrice diagonale.
- 3) Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$. Determinare una base di $\text{Im}f$. L'endomorfismo f è invertibile?
- 4) Esiste un endomorfismo g di $\mathbf{R}^3$ diverso da f tale che $\text{Im}g = \text{Im}f$ e $\text{Ker}g = \text{Ker}f$? In caso affermativo fornirne un esempio.

Esercizio 3. In $\mathbf{R}^4$ munito del prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi vettoriali: $S = \langle (1, 0, 1, 2), (2, 1, 1, 1) \rangle$ e $T = \langle (-1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 1), (-1, 4, 1, 1) \rangle$.

- i) Si dica se S e T sono ortogonali. Nel caso non lo siano determinare il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ ortogonale ad S .
- ii) Si calcoli $\dim(S + T)$ e si dica se vale $S + T = \mathbf{R}^4$.
- iii) Può esistere un sottospazio vettoriale W di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 2 tale che $T + W = \mathbf{R}^4$ e $\dim(T \cap W) = 1$? In caso affermativo se ne faccia un esempio.

Esercizio 4. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio affine di dimensione tre:

- 1) Determinare la retta r passante per i punti $P = (-1, 0, 2)$ e $Q = (2, 1, 1)$.
- 2) Determinare il piano π contenente r e parallelo alla retta $s : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + 3z = 8. \end{cases}$
- 3) Calcolare la distanza del punto $R = (1, 0, 4)$ da π .

N.B. *Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.*