**LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA o AEROSPAZIALE**

Corso di Matematica 2

Tema del 26-11-2003 (tema n.1)

**Esercizio 1.** Si considerino le funzioni lineari $f_t$ di $\mathbb{R}^3$ in se stesso definite, rispetto alla base canonica, dalle matrici $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -t \\ 2 & t & -4 \\ t & -t & t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

- Esiste qualche $f_t$ suriettiva? Per quali valori di $t$?
- Per $t = -5$ si scriva una base di $Im(f_{-5})$ e una di $ker(f_{-5})$.
- $A_0$ è diagonalizzabile? In caso affermativo si determini una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $A_0$.
- Esiste qualche $f_t$ per cui $(3, -1, 0) \in ker(f_t)$? Per quali valori di $t$?

**Esercizio 2.** Nello spazio euclideo di dimensione 3:

1. determinare la retta $s$ del piano $\pi : x - y + z = 0$ passante per $O(0, 0, 0)$ e ortogonale alla retta $r : \begin{cases} x = -1 + 2a \\ y = 1 \\ z = 2 + a. \end{cases}$
2. Esiste una retta $t$ del piano $\pi$ passante per il punto $P(-1, 1, 2)$ parallela a $r$?
3. Quali sono i piani che passano per $r$ ed hanno distanza 1 da $O(0, 0, 0)$?
4. Si studi la posizione reciproca delle rette $r$ e $s$ e si calcoli lo loro distanza.
5. Qual è la retta proiezione ortogonale di $r$ su $\pi$?

**Esercizio 3.** Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ :

$$U_1 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0, \quad x + 2y = 0\}, \; U_2 = \langle(1, 0, 1)\rangle.$$

1. Trovare una base e la dimensione di $U_1$.
2. Determinare $U_1^\perp$ e $U_2^\perp$
3. Dopo aver determinato una base di $U_1 + U_2$ si verifichi che vale l'uguaglianza

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp.$$

**Dopo aver risposto alle domande precedenti** giutificare la verità o la falsità delle seguenti affermazioni:

1. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Allora
   - se $f$ è iniettivo, allora $f^2 (= f \circ f)$ è suriettivo;
   - se $f$ è suriettivo $f$ ha tra i suoi autovalori lo zero;
   - se n=3 e il polinomio caratteristico di $f$ è $(1 - T)(T + 2)(T + 3)$ allora $f$ è invertibile.
2. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, con $A$, $B$ matrici simmetriche. Allora
   - $AB$ è simmetrica;
   - $2A + 3B$ è simmetrica;
   - se inoltre $A$ è invertibile, anche $A^{-1}$ è simmetrica.