

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA o AEROSPAZIALE
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 7-9-04
1^o Appello sessione autunnale
TEMA n.1

Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Discutere, al variare del parametro reale k , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ x + y = -1 \\ x + ky = -2. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k il sistema ammette soluzioni e, quando possibile, determinarle.

Esercizio 2. Fissato nello spazio un riferimento ortonormale, sono assegnati la retta r ed il piano π di equazioni

$$r : \begin{cases} 3y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \quad \pi : 3x - y + 2 = 0.$$

- (i) Determinare il loro punto in comune P .
- (ii) Scrivere le equazioni di una retta perpendicolare a r , passante per P e giacente nel piano π .
- (iii) È possibile trovare in π una retta s tale che r ed s siano sghembe? In caso affermativo esibirne una e verificare che la retta trovata ed r siano sghembe.

Esercizio 3. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ -1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

- (a) Si determinino, per ogni valore di α , $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ e le loro dimensioni.
- (b) Si determinino i valori di α per cui f non è suriettiva.
- (c) Per i valori di α di cui al punto (b) si dica se f è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
- (d) Esistono valori di α per cui A è ortogonalmente diagonalizzabile?

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $v_1 = (0, 0, 1, 1)$, $v_2 = (2, -1, -1, 3)$, $v_3 = (-4, 2, 4, -4)$, $w_1 = (1, 1, 0, 0)$, $w_2 = (-2, 1, 2, -2)$, $w_3 = (6, 0, -4, 4)$.

- (a) Indicati con S il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3 e con T il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori w_1, w_2, w_3 , si determinino una base di $S \cap T$ ed una base di $S + T$.
- (b) Si dica se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_3$. Tale endomorfismo è unico?

Dopo aver risolto gli esercizi precedenti, lo studente risponda alle seguenti domande:

- 1. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ con $\det(A) = 1$, $n > 1$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
 - A. 0 è autovalore di A ;
 - B. A^2 è invertibile;
 - C. A è una matrice ortogonale;
 - D. A ha n autovalori distinti.
- 2. Sia S l'insieme delle matrici reali che hanno $U = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 2) \rangle$ come autospazio; si dica quale delle seguenti frasi è vera:
 - A. in S non ci sono matrici simmetriche;
 - B. ogni matrice di S è diagonalizzabile;
 - C. se A appartiene ad S ed è simmetrica, allora $(2, -2, 1)$ è autovettore di A ;
 - D. $U^\perp$ è un autospazio di ogni matrice di S .

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate.