

Università degli Studi di Padova

Seconda prova parziale – I appello. 14 gennaio 2002

ESAME DI MATEMATICA II

A.A.01/02

Bruno Chiarellotto - Nicola Rodinò - Nicoletta Cantarini

TEMA 4 Lo studente risolva successivamente gli esercizi della prima parte. SOLTANTO dopo aver terminato la prima parte, risolva il maggior numero di quesiti della seconda parte.

PRIMA PARTE

Ex.1 (Per gli studenti che non hanno superato la prima prova parziale.)

Sia f_β l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\beta \\ 0 & \beta-1 & 0 \\ \beta-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\beta \in \mathbf{R}).$$

i) Si ponga $\beta = 1$ e si determinino $\text{Ker } f_1$, $\text{Im } f_1$ e le loro dimensioni, esplicitando una base per tali sottospazi.

ii) Posto $\beta = 1$, si determini la matrice associata all'endomorfismo f_1 rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (-1, 0, -1)\}$ di $\mathbf{R}^3$.

iii) Si determini, al variare di $\beta \in \mathbf{R}$, la controimmagine mediante f_β del vettore $\underline{b} = (0, -1, 0) \in \mathbf{R}^3$.

iv) Si stabilisca per quali valori di β l'endomorfismo f_β è invertibile.

Ex.2 Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ k-3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale k .

i) Stabilire per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$;

ii) Per ciascuno dei valori di k trovati in i) determinare una base di autovettori di A_k e, quando possibile, una matrice ortogonale che diagonalizzi A_k .

Ex.3 Nello spazio euclideo usuale $A^3(\mathbf{R})$, di coordinate x, y, z , si considerino le rette r, s di equazioni, rispettivamente,

$$r : \begin{cases} 4x - y + 2z = 10 \\ 2x + y + 2z = 20 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 1 - 2s \end{cases}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

1) Stabilire la posizione reciproca delle rette r e s .

2) Determinare i punti di minima distanza tra r e s e calcolare la distanza tra le due rette.

3) Determinare una retta passante per il punto $P = (0, -5, 2)$ incidente le rette r e s . Una siffatta retta è unica?

4) Determinare la retta di direzione $d = (1, -5, 0)$ incidente le rette r e s .

SECONDA PARTE

1) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = (0, 2, 1)$ sul sottospazio vettoriale $S = \langle (1, 1, -1), (0, 1, 0) \rangle$ di $\mathbf{R}^3$.

2) Rispondere alle seguenti domande:

- Una matrice ortogonale H può avere un autovalore nullo?
- Dimostrare che se H è una matrice ortogonale $\det(H) = \pm 1$.
- Sia B una matrice quadrata di ordine 3 con un autovalore uguale a 3. Mostrare che la matrice $B - 5I_3$ ha un autovalore uguale a -2 .

3) Rispondere alle seguenti domande:

- Siano r e s due rette nello spazio affine $A^3(\mathbf{R})$. Stabilire, al variare della posizione reciproca di r e s , quando esistono due piani paralleli disgiunti contenenti rispettivamente le rette r e s . Nel caso in cui tali piani esistano, stabilire quando essi sono unici.

- Nello spazio affine $A^3(\mathbf{R})$ siano dati un piano π ed un punto $P \in \pi$. Siano poi π_1 un piano non parallelo a π e r la retta intersezione di π e π_1 . Fornire delle condizioni necessarie e sufficienti affinché valga

$$\text{dist}(P, \pi_1) = \text{dist}(P, r).$$

4) (Per gli studenti che non hanno superato la prima prova parziale.)

Dimostrare che l'insieme $R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio $M_2(\mathbf{R})$ delle matrici quadrate reali di ordine 2. Esibire una base di R .

Attenzione: ogni risposta deve essere opportunamente giustificata, in caso contrario NON sarà valutata. Non è consentito utilizzare appunti né libri.