

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA o AEROSPAZIALE

Corso di Matematica 2

PADOVA 8 settembre 2003

TEMA 1

1. Si consideri il sistema lineare nelle incognite (x_1, x_2, x_3)

$$\Sigma_a : \begin{cases} ax_1 + x_2 - x_3 & = & a \\ ax_1 - x_2 + 2x_3 & = & a \\ ax_1 - 3x_2 + 5x_3 & = & a \end{cases} \quad a \in \mathbf{R}.$$

- a) Risolvere il sistema Σ_a per $a = 1$.
 - b) Risolvere il sistema Σ_a per $a = 0$
(attenzione! Σ_0 è un sistema in tre incognite).
 - c) Si dica per quali valori di $a \in \mathbf{R}$, Σ_a ammette soluzioni.
2. Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$:

$$W = \langle (3, 4, 0), (1, 0, 2) \rangle.$$

- a) Si calcoli una base ortonormale $\beta = (w_1, w_2)$ di W .
 - b) Si estenda β ad una base ortonormale (w_1, w_2, w_3) di $\mathbf{R}^3$.
 - c) Si determinino le coordinate di $(1, 0, 0)$ rispetto alla base di $\mathbf{R}^3$ trovata in b).
3. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- a) Si dica se fra i vettori $(3, 3, 3)$, $(0, 1, 0)$, $(2, -1, -1)$ esistono autovettori di f .
Per ciascuno di essi si scriva il corrispondente autovalore.
 - b) Qual è il polinomio caratteristico di f e quali sono le sue radici?
 - c) Esiste una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizza f ? In caso affermativo trovarla.
4. Nello spazio, riferito a un sistema cartesiano ortonormale, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} y - z = 4 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

e siano $R(0, 3, -1) \in r$ e $S = (-1, 2, 1) \in s$.

- a) Si dica se r e s sono complanari o sghembe.
- b) Calcolare la distanza fra r e s .
- c) Tale distanza è $\|\overrightarrow{RS}\|$? Perché?