

# LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

Padova 18-09-2007

TEMA n.1

**Esercizio 1** Sia  $\mathcal{S} \subset M(3 \times 3, \mathbb{R})$  lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche. Si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{A \in \mathcal{S} \mid (1, 0, 0) \text{ è autovettore di } A\}; \quad W = \{B \in \mathcal{S} \mid (0, 0, 1) \text{ è autovettore di } B\}.$$

- Dimostrare che  $U$  e  $W$  sono sottospazi di  $\mathcal{S}$  e scriverne una base.
- Determinare  $U \cap W$ .
- Determinare  $U + W$ . Tale somma è diretta?
- Determinare, se esiste, un sottospazio  $T \subset \mathcal{S}$  tale che  $U \oplus T = W \oplus T = U + W$ .

**Esercizio 2** Si consideri l'endomorfismo  $L(x, y, z) = (3x + y + z, x + 3y + z, x + y + 3z)$  di  $\mathbb{R}^3$ .

- Determinare nucleo ed immagine di  $L$ .
- Calcolare  $L^{-1}(1, 1, 1)$ .
- Stabilire se 2 è autovalore di  $L$ .
- Scrivere, se esiste, una base ortonormale di autovettori di  $L$ .

- Determinare, se esiste, una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$  rispetto alla quale  $L$  ha matrice  $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Una tale base  $\mathcal{B}$  può essere ortonormale?

**Esercizio 3** Determinare un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  tale che la proiezione ortogonale su  $W$  dei vettori  $(-2, 3, 2, 0)$  e  $(-1, 2, 2, 2)$  sia rispettivamente  $(1, 2, 1, 0)$  e  $(1, 1, 2, 1)$ .  $W$  è unico?

**Esercizio 4** In  $\mathbb{A}^3$ , sia  $r$  la retta passante per  $P(1, 2, 1)$  e  $Q(3, 0, 1)$ .

- Al variare di  $a \in \mathbb{R}$ , stabilire la posizione reciproca di  $r$  con la retta  $s_a : \begin{cases} x + ay - z = 4 \\ x + y + z = a^2 + 3 \end{cases}$ .
- Per  $a = 0$ , calcolare la distanza tra  $r$  ed  $s_0$ .
- Sapendo che i punti  $P, Q$  sono vertici opposti di un rombo che ha area  $2\sqrt{2}$ , determinare gli altri due vertici nel piano  $x + y = 3$ .

**Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate**