LAUREA IN AMBIENTE E TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 26-07-07
TEMA n.1

Esercizio 1. Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^4$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 11 \\ 1 & 1 & k^2 - k & 5 - k^2 \\ 0 & -1 & 2(k^2 - k) & 3k^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo f_k è iniettivo;
- b) stabilire per quali valori di k il vettore $w_k = (0, 4, -k^2 - 3, 2(k^2 + k - 4))$ appartiene all'immagine di f_k ;
- c) stabilire se esistono valori di k tali che la controimmagine del vettore w_k sia costituita da infiniti elementi. In caso affermativo, determinare tale controimmagine.

Esercizio 2. Verificare che $\mathcal{B} = \{(1, 5, 3), (-7, 1, -4), (-2, 11, 9)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Indicata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, siano f e g i due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ che hanno le seguenti matrici nelle base indicate

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad M(g; \mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Scrivere la matrice di $f \circ g$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia $V = \langle (1, 2, 1), (1, 1, 0) \rangle$.

- a) Determinare $V^\perp$.
- b) Determinare, se possibile, una matrice simmetrica A non invertibile che abbia V come autospazio relativo all'autovalore 1.
- c) Determinare una base ortonormale di autovettori di A .
- d) Stabilire se esistono valori del parametro reale k tali che A sia simile alla matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r_k , dipendente dal parametro reale k , di equazioni

$$r_k : \begin{cases} x + y - (k + 1)z + 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{e la retta } s \text{ di equazioni } s : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3 - t \\ z = -t - 2. \end{cases}$$

- a) Determinare, se esistono, valori di k per i quali la corrispondente retta r_k sia ortogonale alla retta s .

- b) Per ciascuna delle rette r_k determinate in a) stabilire se essa è complanare ad s ed in caso affermativo scrivere un'equazione del piano corrispondente.
- c) Determinare, se esistono, valori di k per i quali la corrispondente retta r_k sia parallela alla retta s .
- d) Per ciascuna delle rette r_k determinate in c) calcolare la distanza tra r_k ed s .

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.