

ESAME MATEMATICA 2

Docente M. Garuti 28/8/07

TEMA 1

EX.1. Al variare di k si considerino le matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ k-2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

i) Determinare per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile. Per tutti i valori di k , ove vi siano radici multiple del polinomio caratteristico, si determinino gli autospazi di A_k .

ii) Per i $\bar{k}$ ove $A_{\bar{k}}$ non è diagonalizzabile e vi siano radici multiple del polinomio caratteristico determinare un cambiamento di base $H \in GL_3(\mathbf{R})$ tale che $H^{-1}A_{\bar{k}}H$ sia una matrice triangolare superiore.

EX.2. Sia dato in $\mathbf{R}^3$ lo spazio vettoriale

$$U = \langle (2, 1, 0), (0, 2, 1) \rangle$$

i) Determinare la proiezione ortogonale $w_{//}$ di $w = (1, 1, 1)$ su U .

ii) Determinare T sottospazio di $\mathbf{R}^3$ tale che $U \oplus T = \mathbf{R}^3$, e $T \oplus U^\perp$.

iii) Dell'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ dato da $v \rightarrow v_{//}$, ($v \in \mathbf{R}^3$, $v_{//}$ la proiezione ortogonale di v su U) determinare la matrice associata rispetto alla base canonica.

iv) Trovare tutti i vettori $v \in \mathbf{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale di v su U coincide con la proiezione ortogonale di $(1, 1, 1)$ su U .

EX.3.

i) Sia dato, al variare di $a \in \mathbf{R}$, il sistema lineare nelle variabili x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (a-1)x_3 = a+1 \\ (a+3)x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Determinare al variare di a le soluzioni del relativo sistema.

ii) In $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ si consideri $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Per ogni valore di $s \in \mathbf{R}$ si trovino le matrici $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ tali che

$$AX = sX.$$

EX.4. Nello spazio euclideo usuale si considerino le due rette

$$r = \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad s = \begin{cases} y = -t + 1 \\ x = -3t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

i) Determinare la loro mutua posizione.

ii) Determinare la loro distanza.

iii) Assieme ad r e s si consideri la retta $\rho = (2, 2, 1) + \langle (-2, 0, 2) \rangle$. Dopo aver determinato la mutua posizione di s e ρ , si determinino tutte le rette che intersecano le 3 rette: s , ρ e r (equazioni esplicite).

EX.5. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Stabilire se A e B sono simili.

ii) Determinare, se esiste, una matrice H tale che $B = H^{-1}AH$.

iii) Esiste una tale matrice H che sia anche ortogonale?