LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 4-11-06
Correzione del tema n.1

Esercizio 1 Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y + \alpha z = 1 + \beta \\ 2x + (\alpha^2 + 2\alpha)z = 3 + \alpha \\ 3x + y + 5\alpha z = 7 + \beta. \end{cases}$$

a) Determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema omogeneo associato ammette la soluzione $(\beta, 0, 0)$.

b) Per quali, tra i valori trovati al punto precedente, il sistema risloubile? Determinare per tali valori le soluzioni del sistema lineare.

c) In particolare si determinino le soluzioni del sistema per $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.

Svolgimento. Il sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} x - y + \alpha z = 0 \\ 2x + (\alpha^2 + 2\alpha)z = 0 \\ 3x + y + 5\alpha z = 0. \end{cases}$$

Dire che $(\beta, 0, 0)$ è soluzione di questo sistema vuol dire che

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ 2\beta = 0 \\ 3\beta = 0 \end{cases}$$

cioè $\beta = 0$. Riducendo in forma a scala la matrice del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 2 & 0 & \alpha^2 + 2\alpha & 3 + \alpha \\ 3 & 1 & 5\alpha & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & \alpha^2 & \alpha + 1 \\ 0 & 0 & 2(\alpha - \alpha^2) & 2(1 - \alpha) \end{array}\right)$$

troviamo che il sistema è risolubile per $\alpha \neq 0$. Per $\alpha \neq 0, 1$ ha un'unica soluzione, data da $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha})$, mentre per $\alpha = 1$ l'insieme delle soluzioni è $(-1, 0, 2) + \langle (3, 1, -2) \rangle$.
In particolare, per $\alpha = 2$ e $\beta = 0$, la soluzione è $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^4$ si considerino $W = \langle (1,1,1,1), (1,2,1,2), (0,1,0,0) \rangle$ e l'insieme U delle quaterne x, y, z, t tali che

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

a) Si verifichi che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

b) Si determini una base di $U \cap W$.

c) Si determini la dimensione di $U + W$. La somma $U + W$ è diretta?

d) Se possibile si esprima $(1,1,1,1)$ in due modi diversi come somma di un vettore di U e di uno di W.

Svolgimento. Sviluppando il determinante secondo la prima riga troviamo

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -x-y-z+t = -(x+y+z-t).$$

Pertanto U è l'insieme delle soluzioni del'equazione lineare $x+y+z-t=0$ e quindi è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3.
Il generico vettore di W è $a(1,1,1,1)+b(01,2,1,2)+c(0,1,0,0) = (a+b, a+2b+c, a+b, a+2b)$; apparterrà anche ad U se e solo se

$$(a+b)+(a+2b+c)+(a+b)-(a+2b) = 2a+2b+c = 0,$$

quindi

$$U\cap W = \{(a+b, -a, a+b, a+2b)\} = \langle(1,-1,1,1), (1,0,1,2)\rangle.$$

Poiché $\dim U = \dim W = 3$ e $\dim(U\cap W) = 2$, dalla formula di Grassmann segue che

$$\dim(U+W) = 4.$$

La somma non è diretta perché $U\cap W \neq \{(0,0,0,0)\}$.

Poiché la somma non è diretta, i vettori di $U+W$ si scrivono in modo non unico come somma di un vettore di U e di uno di W. Il vettore $\mathbf{w} = (1,1,1,1)$ appartiene a W e quindi si può scrivere come $\mathbf{w} = \mathbf{0}+\mathbf{w}$. Inoltre, per ogni $\mathbf{v}\in U\cap W$, possiamo anche scrivere $\mathbf{w} = \mathbf{v}+(\mathbf{w}-\mathbf{v})$, somma di un vettore di U e di uno di W. Ad esempio, per $\mathbf{v} = (1,-1,1,1)$, abbiamo le scritture

$$(1,1,1,1) = (0,0,0,0)+(1,1,1,1) = (1,-1,1,1)+(0,2,0,0)$$

Esercizio 3 Si considerino le condizioni

$$f_a(1,2,4) = (1,1,0);\ f_a(3,2,1) = (0,2,1);\ f_a(-1,1,4) = (2,0,a);\ f_a(0,3,8) = (3,1,-a^2).$$

a) Per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le condizioni date? L'applicazione è unica?

b) Per tali valori, determinare nucleo ed immagine di f_a.

c) Per i valori trovati, scrivere la matrice di f_a rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.

d) Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $g(x,y) = (x, x+2y, y)$. Per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g\circ h = f_a$?

Svolgimento. I vettori $(1,2,4), (3,2,1), (-1,1,4)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$: questo si verifica per esempio calcolando

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 1.$$

Pertanto, per ogni scelta di a, esiste un'unica applicazione lineare f_a che soddisfa le prime tre condizioni. Poiché

$$(0,3,8) = (1,2,4)+(-1,1,4)$$

, la f_a soddisferà anche la quarta condizione se e solo se $f_a(0,3,8) = (3,1,-a^2)$ coincide con

$$f_a(1,2,4) + f_a(-1,1,4) = (1,1,0) + (2,0,a) = (3,1,a)$$

e questo si verifica se e solo se $-a^2 = a$, cioè se e solo se $a = 0, -1$. Tale funzione è unica.
Per $a = 0, -1$, scriviamo la matrice di f_a rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,2,4), (3,2,1), (-1,1,4)\}$ nel dominio ed alla base canonica nel codominio e la riduciamo in forma a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Per $a = 0$ la matrice ha rango 3, quindi $\operatorname{Im} f_0 = \mathbb{R}^3$ e $\ker f_0 = \{\mathbf{0}\}$.
Per $a = -1$, la matrice ha rango 2, quindi $\operatorname{Im} f_{-1} = \langle (1,1,0), (0,2,1) \rangle$ mentre $\ker f_{-1}$ è formato dai vettori di coordinate $(-2z, z, z)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Quindi $\ker f_{-1}$ è generato dal vettore

$$-2(1,2,4) + (3,2,1) + (-1,1,4) = (0,-1,-3).$$

La matrice del cambiamento dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è la matrice che ha sulle colonne i vettori di $\mathcal{B}$, cioè

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

pertanto la matrice del cambiamento dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ è la sua inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -13 & 5 \\ -4 & 8 & -3 \\ -6 & 11 & -4 \end{pmatrix}.$$

Perciò, per $a = 0, -1$, la matrice di f_a rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -13 & 5 \\ -4 & 8 & -3 \\ -6 & 11 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -6a-4 & 11a+8 & -4a-3 \end{pmatrix}.$$

Per ogni $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, l'immagine di $g \circ h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è contenuta in $\operatorname{Im} g$; poiché il dominio di g è $\mathbb{R}^2$, la sua immagine è un sottospazio di dimensione ≤ 2 di $\mathbb{R}^3$. Siccome f_0 è suriettiva, non è possibile che $f_0 = g \circ h$ per qualche h.
La matrice di g rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f_{-1}$. Inoltre,

$$g(1,0) = (1,1,0) = f_{-1}(1,2,4); \qquad g(0,1) = (0,2,1) = f_{-1}(3,2,1).$$

Siccome poi $(2,0,-1) = 2(1,1,0) - (0,2,1)$, abbiamo che $g(2,-1) = (2,0,-1)$.
Allora, se h è la funzione definita mediante le condizioni

$$h(1,2,4) = (1,0), \quad h(3,2,1) = (0,1), \quad h(-1,1,4) = (2,-1),$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} (g \circ h)(1,2,4) &= g(1,0) &&= (1,1,0), \\ (g \circ h)(3,2,1) &= g(0,1) &&= (0,2,1), \\ (g \circ h)(-1,1,4) &= g(2,-1) &&= (2,0,-1) \end{aligned}$$

e quindi $f_{-1} = g \circ h$, visto che f_{-1} è definita proprio da queste condizioni.