

II appello Matematica 2, Ingegneria Meccanica, 06/04/05
Soluzione degli esercizi, Tema n.1

Esercizio 1 a) Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$ è 4, dunque i 5 vettori dati non possono essere linearmente indipendenti. Inoltre l'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ genera $\mathbb{R}^4$ se e solo se contiene 4 vettori linearmente indipendenti, vale a dire, se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

Riducendo la matrice in forma a scala si ottiene:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 4.$$

Pertanto i vettori dati generano $\mathbb{R}^4$.

b) Dalla riduzione in forma a scala appena effettuata deduciamo che i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti (le prime tre righe della matrice sono linearmente indipendenti) e dunque individuano una base di W . Appliciamo il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di W :

- $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$
- $w'_2 = v_2 - (v_2 \cdot w_1)w_1 = (3, 1, 0, 1) - \frac{3}{2}(1, 0, 1, 0) = (\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, 1)$
- $w_2 = \frac{w'_2}{\|w'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(3, 2, -3, 2)$
- $w'_3 = v_3 - (v_3 \cdot w_1)w_1 - (v_3 \cdot w_2)w_2$:

osserviamo che il vettore v_3 è ortogonale sia a v_1 , quindi a w_1 , che a v_2 , quindi a w_2 , pertanto:

- $w'_3 = v_3 = (-1, 1, 1, 2)$

- $w_3 = \frac{w'_3}{\|w'_3\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(-1, 1, 1, 2).$

$\{w_1, w_2, w_3\}$ è una base ortonormale di W .

Esercizio 2 Consideriamo la matrice completa $(A|b)$ associata al sistema

dato: $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ a & 0 & a^2 + a & 2a \end{array} \right)$ e riduciamola in forma a scalini:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ a & 0 & a^2 + a & 2a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a^2 + a & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - a & 0 \end{array} \right).$$

Se $a^2 - a \neq 0$, cioè, per ogni $a \neq 0, 1$, $rg(A) = rg(A|b) = 3$, dunque il sistema ammette una ed una sola soluzione che otteniamo risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + 2z = 1 \\ (a^2 - a)z = 0 \end{cases}$$

Si ottiene così l'unica soluzione $(2, 1, 0)$.

Se $a = 0$ oppure $a = 1$, $rg(A) = rg(A|b) = 2$, dunque il sistema ammette infinite soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$. Si ottiene così l'insieme di soluzioni $S = (2, 1, 0) + \langle (-2, -2, 1) \rangle$.

Esercizio 3 a) La verifica della linearità della applicazione L è lasciata allo studente. La matrice associata ad L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) L è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, pertanto esso è iniettivo se e solo se è suriettivo cioè se e solo se è invertibile. Si tratta dunque di stabilire se $\det(A) \neq 0$. Sviluppando il determinante di A secondo gli elementi della seconda riga si ottiene: $\det(A) = -1(2 - 4) - 1(6 - 4) = 2 - 2 = 0$. Pertanto l'applicazione L non è né iniettiva né suriettiva.

c) Dal momento che L non è iniettiva, $\ker(A)$ è non banale. Pertanto 0 è autovalore di L . Calcoliamo innanzitutto $\ker(A)$ risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice A . Riduciamo la matrice A in forma a scala:

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo così il sistema lineare omogeneo di rango 2: $\begin{cases} x + z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases}$ che ha come insieme di soluzioni il sottospazio $\ker(A) = \langle (2, 1, -2) \rangle$.

Per ottenere gli altri autospazi di L calcoliamo il polinomio caratteristico $p_\lambda(A)$ della matrice A :

$$p_\lambda(A) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(\lambda + \lambda^2 - 2) + 2(-1 - \lambda + 2) + 2(2 - 2\lambda) =$$

$$-\lambda(\lambda - 1)^2.$$

Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_1 = 0$ (come sapevamo già), di molteplicità algebrica 1, e $\lambda_2 = 1$ di molteplicità algebrica 2. Calcoliamo l'autospazio V_1 relativo all'autovalore 1:

$$V_1 = \ker(A - Id_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle.$$

Poiché $\dim(V_1) = 2$, la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 coincide con la sua molteplicità algebrica, dunque la matrice A è diagonalizzabile (l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica e molteplicità geometrica uguali ad 1).

Esercizio 4 a) La retta r passa per il punto P e ha direzione $P - Q = (4, 12, 4)$, quindi una sua espressione vettoriale è: $(3, 5, 2) + \langle (1, 3, 1) \rangle$. Ne deduciamo le seguenti equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ricavando il parametro t dalla prima equazione e sostituendolo nelle altre due, otteniamo le equazioni:

$$r : \begin{cases} x - z = 1 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

b) Consideriamo il sistema delle equazioni cartesiane di r e r' e calcoliamo il rango della matrice completa associata a questo sistema:

$$rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right) = rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right) = rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right) = 3.$$

Il sistema delle equazioni delle rette r ed r' ha dunque una sola soluzione. Le rette r ed r' sono incidenti.

c) Dal momento che r e r' sono incidenti, la loro distanza è nulla.

Esercizio 5 Determiniamo innanzitutto la direzione v_s della retta s : poiché la retta s giace sul piano π , le componenti di v_s soddisfano l'equazione della giacitura di π : $6x - y + 4z = 0$. Dunque v_s è un vettore della forma: $v_s = (a, 6a + 4b, b)$, per qualche $a, b \in \mathbb{R}$. Ora imponiamo la condizione di ortogonalità fra la retta s e la retta ℓ : $v_s \cdot v_\ell = 0$:

$$(a, 6a + 4b, b) \cdot (1, 1, 1) = 7a + 5b = 0.$$

Una soluzione della equazione trovata è: $a = 5$, $b = -7$, dunque $v_s = (5, 2, -7)$.

Per determinare la retta s basta ora determinare un suo qualsiasi punto. Sappiamo che s è complanare a s' , dunque, o s e s' sono parallele, oppure si intersecano in un punto P . Il vettore direttore v_s di s appena trovato, tuttavia, non soddisfa le equazioni della giacitura di s' , dunque possiamo concludere che s e s' sono incidenti. Determiniamo la posizione reciproca della retta s' e del piano π , studiando il sistema delle loro equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + z + 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \\ 6x - y + 4z - 1 = 0. \end{cases}$$

Calcoliamo il rango della matrice completa associata al sistema:

$$rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right) = rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 31 \end{array} \right) = rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 29 \end{array} \right) = 3.$$

La retta s' ed il piano π si intersecano dunque nel punto $P = (\frac{14}{3}, -\frac{35}{3}, -\frac{29}{3})$. Dal momento che la retta s giace sul piano π , il suo punto di intersezione con s' è necessariamente l'unico punto in cui la retta s' interseca il piano π , cioè il punto P . Siamo dunque in grado di scrivere la forma vettoriale della retta s :

$$s : (\frac{14}{3}, -\frac{35}{3}, -\frac{29}{3}) + \langle (5, 2, -7) \rangle$$

o, equivalentemente,

$$s : \begin{cases} x = \frac{14}{3} + 5t \\ y = -\frac{35}{3} + 2t \\ z = -\frac{29}{3} - 7t. \end{cases}$$

Per studiare la posizione reciproca di s e ℓ osserviamo innanzitutto che esse non sono parallele dal momento che i vettori v_s e v_ℓ non sono proporzionali. Dunque o s ed ℓ sono incidenti oppure sono sghembe. Osserviamo che la retta ℓ ed il piano π si intersecano nel punto $A = (0, -1, 0)$ (verificare), perciò, analogamente a prima, se s ed ℓ si intersecassero, il loro punto di intersezione sarebbe il punto A . Tuttavia la retta s non passa per il punto A dal momento che il sistema:

$$\begin{cases} \frac{14}{3} + 5t = 0 \\ -\frac{35}{3} + 2t = -1 \\ -\frac{29}{3} - 7t = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni (verificare). Concludiamo che le rette ℓ ed s sono sghembe.

Per stabilire se A è il punto di ℓ che ha distanza minima dalla retta s , consideriamo un punto generico $S = (\frac{14}{3} + 5t, -\frac{35}{3} + 2t, -\frac{29}{3} - 7t)$ della retta s , ed il vettore $S - A = (\frac{14}{3} + 5t, -\frac{32}{3} + 2t, -\frac{29}{3} - 7t)$ congiungente i punti S ed A . Se A è il punto di minima distanza dalla retta s , il vettore $S - A$ dovrà essere ortogonale alla retta ℓ per qualche valore del parametro t . Abbiamo: $v_\ell \cdot (S - A) = (1, 1, 1) \cdot (\frac{14}{3} + 5t, -\frac{32}{3} + 2t, -\frac{29}{3} - 7t) = \frac{14}{3} + 5t - \frac{32}{3} + 2t - \frac{29}{3} - 7t \neq 0$ per ogni valore di t . Dunque A non è il punto di ℓ che ha distanza minima da s .

Esercizio 6 a) Per le proprietà del prodotto di matrici, abbiamo:

$$\gamma(A+B) = H^{-1}(A+B)H = H^{-1}AH + H^{-1}BH = \gamma(A) + \gamma(B), \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\gamma(\lambda A) = H^{-1}(\lambda A)H = \lambda(H^{-1}AH) = \lambda\gamma(A), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Pertanto l'applicazione γ è lineare.

Determiniamo il nucleo di γ , cioè l'insieme delle matrici $A \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $H^{-1}AH = 0$. L'unica matrice simile alla matrice nulla è la matrice nulla, pertanto $\ker(\gamma) = 0$ cioè l'applicazione γ è iniettiva. Poiché si tratta di un endomorfismo, essa è anche suriettiva (e dunque invertibile).

b) L'insieme $\gamma(V)$ è costituito dalle matrici ortogonalmente simili, mediante H , a tutte le matrici simmetriche, dunque è costituito da matrici simmetriche: $\gamma(V) \subset V$. Del resto, per ogni $B \in V$, $B = \gamma(HBH^{-1})$; la matrice HBH^{-1} è simmetrica poiché ortogonalmente simile alla matrice simmetrica B , pertanto $B \in \gamma(V)$, cioè $V \subset \gamma(V)$. Dunque $V = \gamma(V)$.

c) 1 è autovalore per γ se e solo se esiste una matrice non nulla $A \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $\gamma(A) = A$. Basta prendere la matrice identica I_n per ottenere un autovettore relativo all'autovalore 1: $\gamma(I_n) = H^{-1}I_nH = I_n$.