Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 10-04-2010

TEMA n.4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Siano v_1, v_2 vettori di uno spazio vettoriale V. Si ha: $\langle v_1, v_2\rangle = \langle 2v_1, 3v_2, v_1 + v_2\rangle$.
2. In $\mathbb{R}^2$ ci sono infinite coppie di vettori linearmente indipendenti.
3. I sottospazi $S = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ e $T = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ sono in somma diretta.

Risposte.

1. VERO: $\langle v_1, v_2\rangle = \langle 2v_1, 3v_2\rangle$ perché ogni vettore di questi due spazi si esprime come $v = \lambda v_1 + \mu v_2 = \frac{\lambda}{2}(2v_1) + \frac{\mu}{3}(3v_2)$. Dato che $v_1 + v_2 \in \langle v_1, v_2\rangle$, possiamo aggiungerlo ai generatori senza alterare lo spazio.
2. VERO: per esempio, data una coppia di vettori indipendenti $\{w_1, w_2\}$, per ogni $\alpha \neq 0$ i vettori $\{w_1, \alpha w_2\}$ formano una coppia di vettori indipendenti.
3. FALSO: i generatori di S non sono proporzionali, così come quelli di T, dunque $\dim S = \dim T = 2$. Se la somma $S + T$ fosse diretta, per la formula di Grassmann dovrebbe avere dimensione 4, il che è assurdo visto che $S + T \subseteq \mathbb{R}^3$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\leq 3}[X] = \{p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$ dei polinomi di grado minore od ugale a 3, si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] |\, p(0) = 0\}; \qquad W_k = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] |\, p(1) = k\}.$$

a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che W_k sia un sottospazio di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$.

b) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere una base di $U \cap W_k$.

c) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), determinare $U + W_k$. Tale somma è diretta?

d) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere, se possibile, il polinomio $1 + X$ in due modi diversi come somma di un elemento di U e di uno di W_k.

e) Calcolare $\dim < W_k >$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Un sottospazio deve contenere il vettore nullo, che nel caso di di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ è il polinomio costante $0 + 0X + 0X^2 + 0X^3$, che vale 0 in ogni punto, in particolare in $X = 1$. Dunque W_k può essere un sottospazio solo per $k = 0$.
Per ogni $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X]$, si ha $p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, dunque:

$$\begin{aligned} W_0 &= \left\{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] \,|\, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\right\} \\ &= \left\{-(a_1 + a_2 + a_3) + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X]\right\} \\ &= \left\{a_1(X - 1) + a_2(X^2 - 1) + a_3(X^3 - 1) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X]\right\} \\ &=< X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1 > . \end{aligned}$$

In particolare W_0 è un sottospazio.

Per ogni $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X]$, si ha $p(0) = a_0$, pertanto

$$U = \left\{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] \,|\, a_0 = 0\right\} =< X, X^2, X^3 > .$$

Il sottospazio $U \cap W_0$ è costituito dai polinomi soddisfacenti entrambe le condizioni

$$p(0) = a_0 = 0; \qquad p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} U \cap W_0 &= \left\{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] \,|\, a_0 = 0;\ a_1 + a_2 + a_3 = 0\right\} \\ &= \left\{-(a_2 + a_3)\, X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X]\right\} \\ &= \left\{a_2(X^2 - X) + a_3(X^3 - X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X]\right\} \\ &=< X^2 - X, X^3 - X > . \end{aligned}$$

Siccome $U \cap W_0 \neq \{\mathbf{0}\}$, la somma $U + W_0$ non è diretta. Abbiamo stabilito che $\dim W_0 = 3$; dato che U contiene polinomi che non appartengono a W_0, per esempio $X \in U$ e $X \notin W_0$, necessariamente $\dim(U + W_0) = 4 = \dim \mathbb{R}^{\leq 3}[X]$, quindi $U + W_0 = \mathbb{R}^{\leq 3}[X]$.

Dato che la somma $\mathbb{R}^{\leq 3}[X] = U + W_0$ non è diretta, è certamente possibile esprimere in più modi ogni polinomio di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ come somma di elementi dei due spazi. Per trovare una tale espressione, determiniamo i coefficienti di $1+X$ rispetto alla base $\{X-1, X^2-1, X^3-1, X\}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ (ottenuta aggiungendo alla base di W_0 il vettore $X \in U$):

$$1 + X = \alpha(X - 1) + \beta(X^2 - 1) + \gamma(X^3 - 1) + \delta X = (-\alpha - \beta - \gamma) + (\alpha + \delta)X + \beta X^2 + \gamma X^3$$

da cui, uguagliando i coefficienti delle potenze della variabile, ricaviamo

$$\begin{cases} -\alpha - \beta - \gamma = 1 \\ \alpha + \delta = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 2 \end{cases}$$

ossia $1 + X = (1 - X) + 2X$. Una seconda scrittura di $1 + X$ si ottiene aggiungendo e sottraendo un vettore non nullo di $U \cap W_0$, per esempio

$$1 + X = [(1 - X) - (X^2 - X)] + [2X + (X^2 - X)] = (1 - X^2) + (X + X^2).$$

Se $p(X) \in W_k$ allora $p(X) - k$ è un polinomio che vale 0 in $X = 1$, e quindi appartiene a W_0. Dunque $p(X) = k + (p(X) - k) \in k + W_0$, cioè $\forall k \in \mathbb{R}$, $W_k = k + W_0$ è una varietà lineare. Pertanto il sottospazio $< W_k >$ generato da W_k contiene sempre il sottospazio W_0 e contiene anche il polinomio costante k. Siccome per $k \neq 0$ il polinomio costante $k \notin W_0$, abbiamo che $W_0 \subsetneq < k + W_0 >$ e quindi $\dim W_0 \lneq \dim < W_k >$. Dato che $\dim W_0 = 3$ e che $\dim < W_k > \leq \dim \mathbb{R}^{\leq 3}[X] = 4$, concludiamo che $< W_k > = \mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ per $k \neq 0$.

Esercizio 2 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_α:

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} >; \quad \Sigma_\alpha : \begin{cases} x - z - t = -1 \\ x + 2y + (2\alpha + 1)z + 3t = 2\alpha - 1 \\ 3x + 4y + (3\alpha + 2)z + (\alpha + 5)t = 3\alpha - 1. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_α hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_α.

Svolgimento. Equazioni per S si trovano imponendo che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \\ t \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} > .$$

Dobbiamo quindi imporre che il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ x-1 & y+1 & z & t \end{pmatrix}$$

sia pari al rango della matrice formata dalle sole prime tre righe, cioè 3 (è già in forma a scala). Calcolando la decomposizione LU (riduzione in forma a scala) troviamo:

$$P = I_4; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x-1 & x+y & x+y+z & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x+y+z+t \end{pmatrix}$$

e dunque il sistema cercato è $\Sigma' : x + y + z + t = 0$. Quest'equazione è omogenea dunque S è un sottospazio, cosa che si poteva verificare subito dato che il vettore $(1, -1, 0, 0)^T$ appartiene allo spazio parallelo ad S.

Le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_α sono le soluzioni del sistema di 4 equazioni ottenute mettendo in un sistema unico le equazioni di Σ' e Σ_α. La matrice di $\Sigma' \cap \Sigma_\alpha$ è dunque:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2\alpha+1 & 3 & 2\alpha-1 \\ 3 & 4 & 3\alpha+2 & \alpha+5 & 3\alpha-1 \end{array}\right)$$

e la sua riduzione in forma a scala è data dalla matrice U:

$$P = I_4; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \end{array}\right).$$

Quindi il rango della matrice completa è 4 per $\alpha \neq 0, 1$, nel qual caso c'è un'unica soluzione: $(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\alpha+2}{\alpha}, 1, \frac{1}{\alpha})^T$.

Per $\alpha = 0$ il rango della matrice incompleta è 3 mentre quello della completa è 4, dunque il sistema non è risolubile.

Per $\alpha = 1$ il rango delle matrici completa ed incompleta è pari a 3, quindi l'insieme delle soluzioni è una varietà lineare di dimensione 1: $(0, -1, 0, 1)^T + < (1, -2, 1, 0)^T >$.

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che:

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}.$$

a) Verificare che esiste una ed una sola applicazione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

c) Determinare nucleo e immagine di f.

d) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia iniettiva.

e) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$h^{-1}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle.$$

Una siffatta funzione è unica? Stabilire se $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} f$ e/o $\ker h \supset \ker f$.

Svolgimento. I vettori assegnati in $\mathbb{R}^3$ sono generatori, come risulta dalla riduzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Pertanto i vettori $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$. Le coordinate

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

del quarto vettore rispetto a $\mathcal{B}$ si trovano risolvendo il sistema lineare di matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right), \tag{2}$$

da cui ricaviamo le soluzioni $\alpha = -1$, $\beta = 2$ e $\gamma = -2$. [NB: il fatto che la matrice incompleta ha rango 3 è una nuova dimostrazione del fatto che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$: a posteriori vediamo quindi che sarebbe stato sufficiente risolvere quest'ultimo sistema, senza calcolare la decomposizione (1).] Dato che i vettori di $\mathcal{B}$ formano una base, esiste un'unica $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare soddisfacente le prime tre condizioni. Verifichiamo che anche l'ultima è soddisfatta:

$$f\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix} = f\left[-\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right] = -\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}.$$

È facile scrivere la matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ nel dominio e canonica nel codominio:

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{E}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per trovare la matrice richiesta occorre cambiare base nel dominio:

$$M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B},\mathcal{E}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix};\quad M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E}_3,\mathcal{B})=M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B},\mathcal{E}_3)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&1&-1\\1&-2&3\end{pmatrix}.$$

Pertanto:

$$M(f;\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2)=M(f;\mathcal{B},\mathcal{E}_2)M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E}_3,\mathcal{B})=\begin{pmatrix}2&0&1\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&1&-1\\1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Quest'ultima matrice è già in forma a scala ed ha rango 2, dunque $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$ e $\dim\ker f=1$. Sulla matrice è però evidente che il secondo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$ appartiene a $\ker f$, da cui concludiamo che

$$\ker f=\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle. \tag{3}$$

Osservazione. Un modo ancora più veloce di procedere sarebbe stato calcolare subito l'inversa della matrice $M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B},\mathcal{E}_2)$: il fatto che questa sia invertibile, garantisce immediatamente che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (risparmiandoci il calcolo della decomposizione (1)) ed i coefficienti di $(-3,-2,-1)^T$ rispetto a $\mathcal{B}$ si calcolano moltiplicando questo vettore per la matrice inversa $M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E}_3,\mathcal{B})$ (risparmiandoci la risoluzione del sistema (2)).

Essendo indipendenti, i vettori $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^2$. Esiste un'unica $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ lineare tale che

$$g\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix};\qquad g\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Per costruzione $f\circ g=id_{\mathbb{R}^2}$, ed è in particolare iniettiva.

Traduciamo la condizione su h:

$$h\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix};\qquad \ker h=\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\rangle \tag{4}$$

Osserviamo che i vettori di $\ker h$ sono indipendenti ed ovviamente $(1,2,1)^T\notin\ker h$ (i vettori di $\ker h$ hanno tutti la prima coordinata nulla). Dunque i tre vettori del dominio sono indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^3$. Ne deduciamo che le condizioni (4) sono equivalenti alle condizioni:

$$h\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix};\qquad h\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\qquad h\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Inoltre, formando i vettori del dominio una base, esiste un'unica $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ lineare soddisfacente le condizioni (5).
Essendo $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$, la condizione $\operatorname{Im} h\subseteq\operatorname{Im} f$ è vuota. Tenuto conto di (3), la condizione $\ker f\subset\ker h$ segue banalmente dalla seconda condizione in (4).